

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 11. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) обчислювати значення арккотангенсів чисел;
- 2) розв’язувати рівняння $\operatorname{ctg} x = a$;
- 3) розв’язувати рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку;
- 4) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha}{\cos 5\alpha + \cos \alpha}$.
2. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 3 = 0$.
3. Розв’яжіть рівняння $\sin 4x \cdot \cos 2x = \cos 4x \cdot \sin 2x$.
4. Розв’яжіть рівняння $3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 4$.
5. Чому дорівнює значення виразу $\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$, якщо $\cos \alpha = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

III. Обчислення значень арккотангенсів чисел

Нагадаємо, що арккотангенсом числа a називають кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса.

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a$.
3. $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$.
4. $\operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} x) = x$, якщо $0 < x < \pi$.

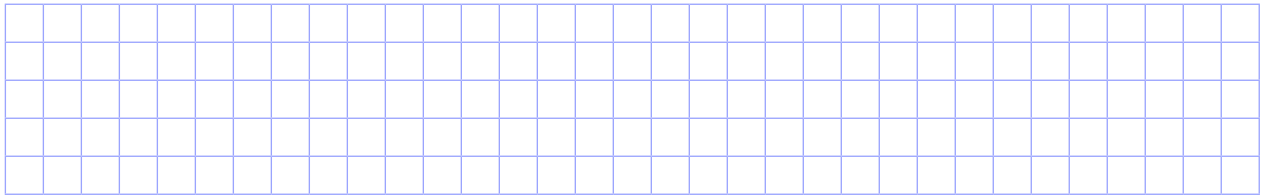
Примітка. Арккотангенс — це кут, що належить проміжку $(0; \pi)$, тому в деяких завданнях, у яких потрібно обчислити тригонометричну функцію від арккотангенса, зручно позначити його якою небудь грецькою літерою α , β і т. ін.

Приклад 1. Обчисліть: $\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $0 < \frac{\pi}{6} < \pi$ і $\operatorname{Atg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

Приклад 2. Обчисліть: $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.



IV. Розв'язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$

Нагадаємо загальну формулу рівняння $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arccotg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

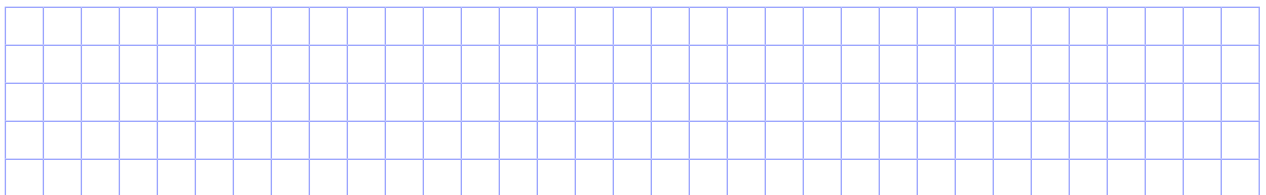
Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 2\right) = -1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 2\right) = -1$, $\frac{x}{3} + 2 = \operatorname{arccotg}(-1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{3} + 2 = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \frac{3\pi}{4} - 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{9\pi}{4} - 6 + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{9\pi}{4} - 6 + 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5x} = 1$.



V. Розв'язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку

При розв'язуванні рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку дотримуються певної послідовності дій.

- 1) Знайдіть головний розв'язок, який належить проміжку $(0; \pi)$.
- 2) Знайдіть загальний розв'язок рівняння.
- 3) Запишіть подвійну нерівність для знайденого кореня, наприклад $a < x \leq b$, якщо за умовою корені належать проміжку $(a; b]$ та розв'яжіть її.
- 4) Знайдіть усі розв'язки в межах заданого проміжку. Якщо їх важко знайти, то скористайтеся графіком або одиничним колом.

Приклад 5. Укажіть найменший корінь рівняння $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$ на проміжку $[-\pi; 3\pi]$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то перепишемо дане рівняння

у вигляді: $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arccotg}(-1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\pi < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < 3\pi, \quad -1 < \frac{3}{2} + 2n < 3,$$

$$-2,5 < 2n < 1,5, \quad -1,25 < n < 0,75$$

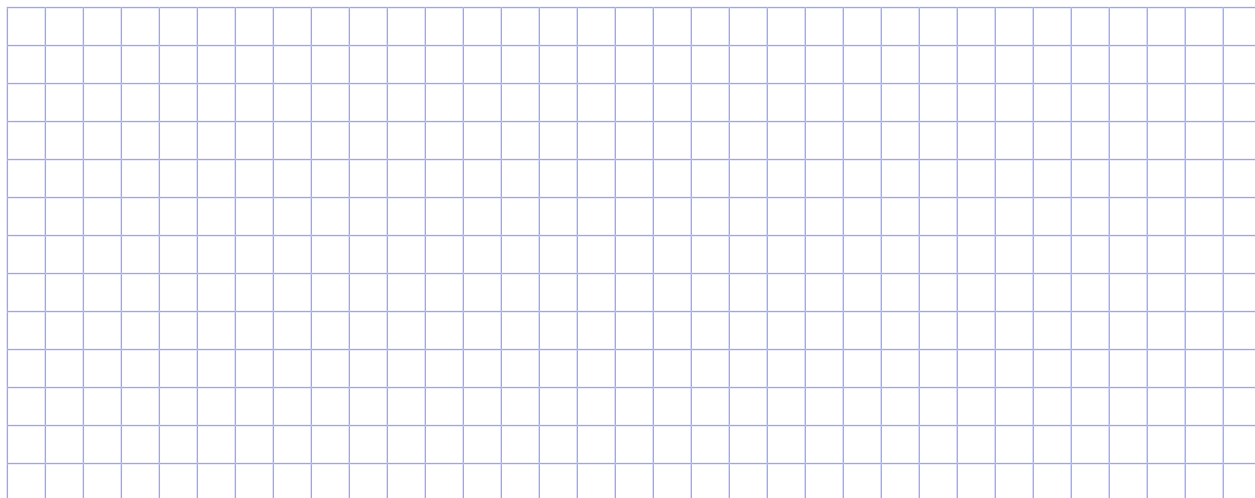
$$\text{Якщо } n = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Якщо } n = 0, \text{ то } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Отже, найменший корінь даного рівняння на проміжку $[-\pi; 3\pi]$ дорівнює $-\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2}$.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Скільки коренів рівняння належать проміжку $[-\pi; 2\pi]$?



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дрон, який запущений із початку системи координат, рухається по параболічній траєкторії, що описується у декартовій системі координат рівнянням $y = -0,004x^2 + x$. У точці з координатами (100; 10) знаходиться лазер, який наведений на дрон. У деякий момент оператор помічає, що кут наведення лазера до горизонту задовольняє рівняння $\operatorname{ctg} \varphi = 2$. Визначте координати дрона у цей момент часу.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1)$

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$.

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1$;

2. Чи може $\operatorname{arctg} x$ дорівнювати:

1) 0;

2) $\frac{\pi}{2}$;

3) $\sqrt{2}$;

4) 4;

5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) -0,1?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = 3$;

2) $\operatorname{ctg} x = -50$;

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{9}$;

4) $\operatorname{ctg} x = \pi$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0,2$;

2) $\operatorname{ctg} 6x = -9$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(0,1x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$.

5. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} 5x = 1$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

6. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; 3\pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$;

2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$;

4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 5$;

2) $3 \operatorname{ctg}(2x - 7) = -3$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2x} = 0$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{x} = 1$;

3) $\operatorname{ctg}(\pi \sin x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = -1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg} 4x = 3, x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\operatorname{ctg} 3x = -2, x \in [-\pi; 2\pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\operatorname{ctg} x + 5)(1 - 2 \cos x) = 0$;

3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 3) \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$;

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2 \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right) (3 \operatorname{tg} x - 1) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \right) (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{7} \right)$;

2) $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{9} \right)$;

3) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} 3)$;

4) $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{7} \right)$.

8. Знайдіть усі корені рівняння, які належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg}^2 x = 3, x \in [-\pi; \pi]$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}, x \in (0; 2\pi)$.

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) = 0$ на проміжку $1 < x < 5$.

10. Розв'яжіть рівняння $\left| \operatorname{ctg} \frac{2x}{3} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\cos \left(x + \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right)$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 \operatorname{ctg} \left(1 - \frac{x}{4} \right) - 7 = 0$;

2) $5 \operatorname{ctg} \left(1 + \frac{x}{3} \right) + 6 = 0$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{7} \pi \right)$;

2) $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{5} \pi \right)$.

2. Доведіть, якщо $-1 < a < 1$, то $\operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x) \cdot \sqrt{9-x^2} = 0$;

2) $\operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{4-|x|} = 0$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)(\operatorname{Atg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?
5. Розв'яжіть рівняння:
 1) $8 \operatorname{ctg}^3 x + 1 = 0$; 2) $27 \operatorname{ctg}^3 x - 8 = 0$; 3) $9 \operatorname{ctg}^4 x = 1$; 4) $16 \operatorname{ctg}^4 2x = 1$.
6. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-a; \frac{\pi}{2}\right]$ містить не менше трьох коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який визначає кількість коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
- 2) Мені здалося цікавим
- 3) У мене залишилися запитання щодо
- Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

- Використання рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ у системах супутникового зв'язку або радіозв'язу.
- Розрахунок кута нахилу конструкцій за допомогою рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
- Моделювання кута спостереження за тілом, кинутим під кутом до горизонту.
- Розв'язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ з параметрами.
- Визначення кута наведення прицільних систем при стрільбі.







