

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 11. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення значень арккотангенсів чисел.
2. Розв’язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$.
3. Розв’язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв’язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як змінюється котангенс при наближенні кута до нуля?
- 2) Чи завжди в практичних задачах рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ має нескінченну кількість коренів?
- 3) Скільки коренів має рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ на проміжку $[0; 2\pi)$?
- 4) У яких практичних задачах може знадобитися вміння розв'язувати рівняння $\operatorname{ctg} x = a$?
- 5) Чи може арккотангенс деякого кута дорівнювати 4?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha}{\cos 5\alpha + \cos \alpha}$.
Відповідь. $\operatorname{tg} 3\alpha$.
2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 3 = 0$.
Відповідь. $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
3. Розв'яжіть рівняння $\sin 4x \cdot \cos 2x = \cos 4x \cdot \sin 2x$.
Відповідь. $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
4. Розв'яжіть рівняння $3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 4$.
Відповідь. Коренів немає.

5. Чому дорівнює значення виразу $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, якщо $\cos\alpha = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

Відповідь. $-0,96$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дрон, який запущений із початку системи координат, рухається по параболічній траєкторії, що описується у декартовій системі координат рівнянням $y = -0,004x^2 + x$. У точці з координатами $(100; 10)$ знаходиться лазер, який наведений на дрон. У деякий момент оператор помічає, що кут наведення лазера до горизонту задовольняє рівняння $\operatorname{ctg} \varphi = 2$. Визначте координати дрона у цей момент часу.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

III. Обчислення значень арккотангенсів чисел

Нагадаємо, що арккотангенсом числа a називають кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса.

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$.
4. $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, якщо $0 < x < \pi$.

Примітка. Арккотангенс — це кут, що належить проміжку $(0; \pi)$, тому в деяких завданнях, у яких потрібно обчислити тригонометричну функцію від арккотангенса, зручно позначити його якою небудь грецькою літерою α , β і т. ін.

Ілюстративні приклад

6. Обчисліть: $\operatorname{arccctg} \sqrt{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arccctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $0 < \frac{\pi}{6} < \pi$ і $\operatorname{Atg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

7. Обчисліть: $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha$, де $0 < \alpha < \pi$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Звідки $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2$. Отже, $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = 2$

Відповідь. 2.

8. Обчисліть $\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Розв'язання. Оскільки $-\frac{\pi}{4} < 0$, то не можна одразу застосовувати формулу $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x$.

$$\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right) = \operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{4}$.

IV. Розв'язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$

Нагадаємо загальну формулу рівняння $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arccctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} + 2 \right) = -1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} + 2 \right) = -1$, $\frac{x}{3} + 2 = \operatorname{arccctg}(-1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{3} + 2 = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \frac{3\pi}{4} - 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{9\pi}{4} - 6 + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{9\pi}{4} - 6 + 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

10. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5x} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5x} = 1$, $\frac{2\pi}{5x} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{8} + \frac{5n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{x} = \frac{5+20n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{8}{5+20n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{8}{5+20n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{Atg} x$ є непарною, то перепишемо дане рівняння у вигляді: $\operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sqrt{3}$, $2x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

V. Розв'язування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку

При розв'язуванні рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку дотримуються певної послідовності дій.

- 1) Знайдіть головний розв'язок, який належить проміжку $(0; \pi)$.
- 2) Знайдіть загальний розв'язок рівняння.
- 3) Запишіть подвійну нерівність для знайденого кореня, наприклад $a < x \leq b$, якщо за умовою корені належать проміжку $(a; b]$ та розв'яжіть її.
- 4) Знайдіть усі розв'язки в межах заданого проміжку. Якщо їх важко знайти, то скористайтеся графіком або одиничним колом.

Ілюстративні приклади

- 12.** Укажіть найменший корінь рівняння $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$ на проміжку $[-\pi; 3\pi]$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то перепишемо дане рівняння у вигляді: $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arccotg}(-1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\pi < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < 3\pi, \quad -1 < \frac{3}{2} + 2n < 3,$$

$$-2,5 < 2n < 1,5, \quad -1,25 < n < 0,75$$

$$\text{Якщо } n = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Якщо } n = 0, \text{ то } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Отже, найменший корінь даного рівняння на проміжку $[-\pi; 3\pi]$ дорівнює $-\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2}$.

- 13.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Скільки коренів рівняння належать проміжку $[-\pi; 2\pi]$?

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ — непарна, то перепишемо дане рівняння у вигляді: $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $2x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} < 2\pi, \quad -1 < \frac{1}{3} + \frac{n}{2} < 2, \quad -6 < 2 + 3n < 12, \quad -8 < 3n < 10,$$

$$-2\frac{2}{3} < n < 3\frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Існує шість цілих значень n , що задовольняють останню нерівність.

Відповідь. 6.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дрон, який запущений із початку системи координат, рухається по параболічній траєкторії, що описується у декартовій системі координат рівнянням $y = -0,004x^2 + x$. У точці з координатами (100; 10) знаходиться лазер, який наведений на дрон. У деякий момент оператор помічає, що кут наведення лазера до горизонту задовольняє рівняння $\operatorname{ctg} \varphi = 2$. Визначте координати дрона у цей момент часу.

Розв'язання. Нехай $(x; y)$ — шукана точка. Котангенс кута нахилу лазера до горизонту становить: $\frac{x-100}{y-10}$.

Таким чином, маємо рівняння $\frac{x-100}{y-10} = 2$, звідки $x = 2y + 80$.

Підставимо отриманий вираз для x у рівняння траєкторії дрона:

$$y = -0,004(2y + 80)^2 + (2y + 80),$$

$$y = -0,016y^2 - 1,28y - 25,6 + 2y + 80,$$

$$0,016y^2 + 0,28y - 54,4 = 0,$$

$$16y^2 + 280y - 54400 = 0,$$

$$2y^2 + 35y - 6800 = 0,$$

$$D = 35^2 + 8 \cdot 6800 = 55625,$$

$$y_1 = \frac{-35 + \sqrt{55625}}{4} \approx 50,21,$$

$$y_2 = \frac{-35 - \sqrt{55625}}{4} \approx -67,71 \text{ — не задовольняє умову задачі.}$$

$$\text{Тоді } x_1 = 2y_1 + 80 = 180,42.$$

Отже, координати точки, які задовольняє умову задачі становлять (180,42; 50,21).

Відповідь. (180,42; 50,21).

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg}^2 x \geq 0$ і $\operatorname{ctg}^2 x \geq 0$, то за нерівністю Коші: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x} = 2$, причому рівність досягається лише коли $\operatorname{tg}^2 x = 1$ і $\operatorname{ctg}^2 x = 1$.

Для наборів чисел (1; 1) та $(\sin x; \cos x)$ застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $(\sin x + \cos x)^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$, $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2$,

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}, \quad -2 \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq 2.$$

Таким чином дане рівняння рівносильне системі:
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \operatorname{ctg}^2 x = 1, \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Перше і друге рівняння системи задовольняють числа виду $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а третє рівняння — лише числа виду $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, коренями даного рівняння будуть числа виду $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1)$

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right)$.

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1$;

2. Чи може $\operatorname{arctg} x$ дорівнювати:

1) 0;

2) $\frac{\pi}{2}$;

3) $\sqrt{2}$;

4) 4;

5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) -0,1?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = 3$;

2) $\operatorname{ctg} x = -50$;

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{9}$;

4) $\operatorname{ctg} x = \pi$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0,2$;

2) $\operatorname{ctg} 6x = -9$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(0,1x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$.

5. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} 5x = 1$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

6. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; 3\pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$;

2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$;

4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 5$;

2) $3\operatorname{ctg}(2x - 7) = -3$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2x} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{x} = 1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi \sin x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = -1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg} 4x = 3, x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\operatorname{ctg} 3x = -2, x \in [-\pi; 2\pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$; 2) $(\operatorname{ctg} x + 5)(1 - 2 \cos x) = 0$;
3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0$; 4) $(\operatorname{tg} x - 3) \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$;

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2 \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right) (3 \operatorname{tg} x - 1) = 0$; 2) $\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \right) (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{7} \right)$; 2) $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{9} \right)$;
3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 3)$; 4) $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{7} \right)$.

8. Знайдіть усі корені рівняння, які належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg}^2 x = 3, x \in [-\pi; \pi]$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}, x \in (0; 2\pi)$.

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) = 0$ на проміжку $1 < x < 5$.

10. Розв'яжіть рівняння $\left| \operatorname{ctg} \frac{2x}{3} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\cos \left(x + \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right)$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 \operatorname{ctg} \left(1 - \frac{x}{4} \right) - 7 = 0$; 2) $5 \operatorname{ctg} \left(1 + \frac{x}{3} \right) + 6 = 0$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{7} \pi \right)$; 2) $\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{5} \pi \right)$.

2. Доведіть, якщо $-1 < a < 1$, то $\operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x) \cdot \sqrt{9-x^2} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{4-|x|} = 0$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)(\operatorname{Atg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $8\operatorname{ctg}^3 x + 1 = 0$; 2) $27\operatorname{ctg}^3 x - 8 = 0$; 3) $9\operatorname{ctg}^4 x = 1$; 4) $16\operatorname{ctg}^4 2x = 1$.

6. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-a; \frac{\pi}{2}\right]$ містить не менше трьох коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який визначає кількість коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ на заданому проміжку.

VIII. Рефлексія (1 хв)

1) Я сьогодні навчився/навчилась

2) Мені здалося цікавим

3) У мене залишилися запитання щодо

Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Використання рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ у системах супутникового зв'язку або радіозв'язу.
2. Розрахунок кута нахилу конструкцій за допомогою рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
3. Моделювання кута спостереження за тілом, кинутим під кутом до горизонту.
4. Розв'язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ з параметрами.
5. Визначення кута наведення прицільних систем при стрільбі.