

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 12. Розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

1) розв'язувати рівняння виду $A \cos(kx + b) = a$;

2) розв'язувати рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$;

3) розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$;

4) розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$;

5) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin 35^\circ + \sin 85^\circ}{\cos 25^\circ}$. м
3. Спростіть вираз $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
4. Укажіть амплітуду гармонічного коливання $y(t) = \frac{3}{7} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.
5. Знайдіть множину значень функції $y = 2 \cos 3x + 1$.

- 4.** Якщо $\frac{a}{A}=1$, $\frac{a}{A}=-1$ чи $\frac{a}{A}=0$, то скористайтеся формулами коренів для особливих випадків:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

- 5.** В усіх інших випадках використайте загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$ та знайдіть аргумент синуса.
- 6.** Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = 2\sqrt{3}$.

[illegible]

V. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$ Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$ 1. Поділіть обидві частини даного рівняння на A , отримаєте $\operatorname{tg}(kx + b) = \frac{a}{A}$.

2. Якщо $k < 0$, то скористаєтесь непарністю функції $y = \operatorname{tg} x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.
3. Використайте загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та знайдіть аргумент тангенса.
4. Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

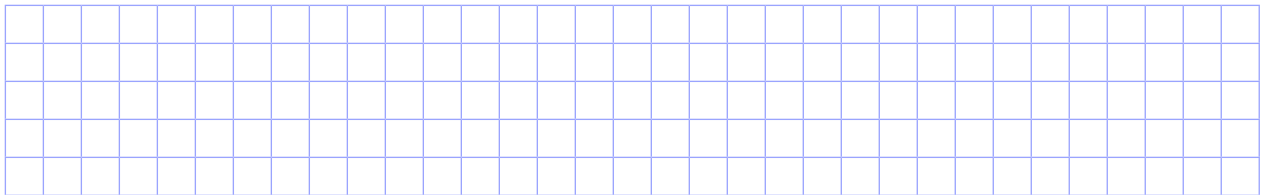
Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $3 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

[illegible]

VI. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$ **Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$** 1. Поділіть обидві частини даного рівняння на A , отримаєте $\operatorname{ctg}(kx + b) = \frac{a}{A}$.

2. Якщо $k < 0$, то скористаєтеся непарністю функції $y = \operatorname{ctg} x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.
3. Використайте загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ та знайдіть аргумент тангенса.
4. Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(2 - \frac{x}{4}\right) = -1$.

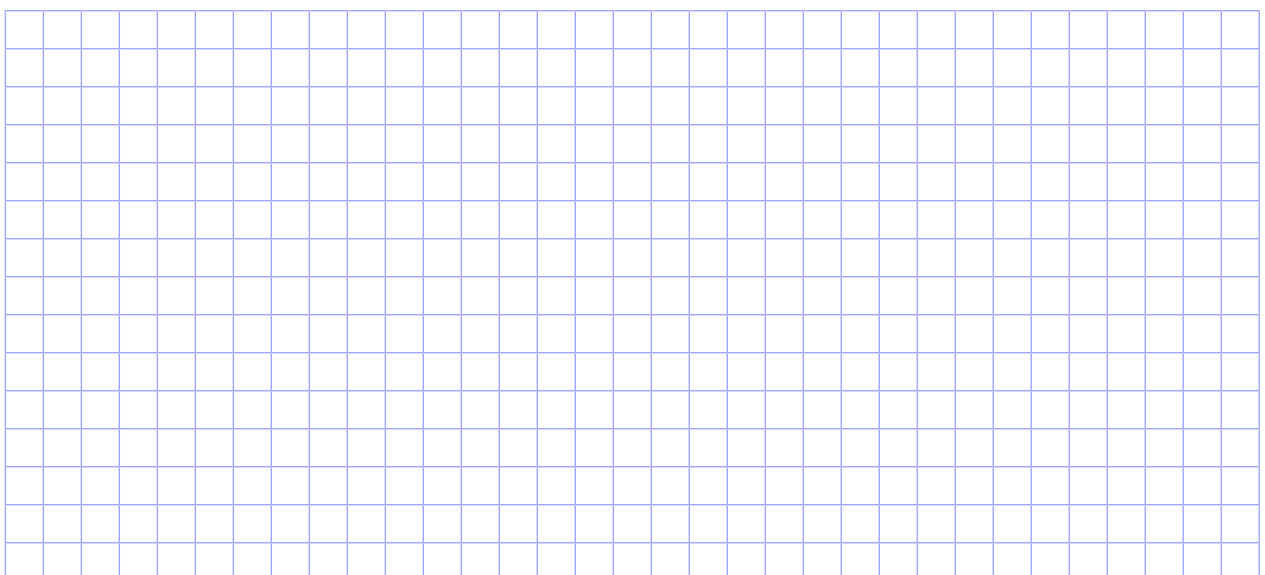


VII. Вибірка коренів рівнянь на заданому проміжку

Нагадаємо алгоритм для вибірки коренів на заданому проміжку.

- 1) Знайдіть загальний розв'язок рівняння.
- 2) Запишіть подвійну нерівність для знайденого кореня, наприклад $a < x \leq b$, якщо, за умовою, корені належать проміжку $(a; b]$ та розв'яжіть її.
- 2) Знайдіть усі розв'язки в межах заданого проміжку. Якщо їх важко знайти, то скористайтесь графіком або одиничним колом.

Приклад 6. Знайдіть усі корені рівняння $(2 \sin x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$, що задовольняють нерівність $\cos x > 0$.



VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. В електричному колі змінна напруга змінюється за законом

$$U(t) = 220 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right),$$

де напруга U вимірюється у вольтах, а час t — у секундах. Скільки разів упродовж перших 10 секунд після початку спостереження напруга дорівнюватиме 110 В?

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; & 2) \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0; & 3) \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -1; \\ 4) \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & 5) \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 0; & 6) \cos\left(\frac{3x}{2} - \pi\right) = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin(5x - 2) = \frac{1}{2}; & 2) \sin(3x + 1) = 0; & 3) \sin\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ 4) \sin\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; & 5) \sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) = 0; & 6) \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = -1. \end{array}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{llll} 1) \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; & 2) \operatorname{tg}(3x - 1) = 0; & 3) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 2\right) = \sqrt{3}; & 4) \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -1; \\ 5) \operatorname{tg}\left(\frac{5x}{3} + \pi\right) = 0; & 6) \operatorname{tg}(6x - 2) = -\sqrt{3}; & 7) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = 0; & 8) \operatorname{tg}\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{array}$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; & 2) \operatorname{ctg}(2x - 1) = 1; & 3) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 2\right) = \sqrt{3}; \\ 4) \operatorname{ctg}\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1; & 5) \operatorname{ctg}\left(\frac{4x}{5} + \pi\right) = 0; & 6) \operatorname{ctg}(6x + 2) = -\sqrt{3}. \end{array}$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 2) \sin(3t + 5) = 1; \quad 3) \operatorname{tg}(2x - 1) = 0; \quad 4) \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

6. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[0; 2\pi]$:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0; & 2) \sin 2x = 1; & 3) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1; \\ 4) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1; & 5) \cos 3x = 0; & 6) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = -1; \end{array}$$

$$7) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$8) \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1;$$

$$9) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right) = -1;$$

$$10) \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$11) \operatorname{ctg}(-4x) = 1;$$

$$12) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = -1.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3\cos\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right) = 1,7;$$

$$2) 5\cos(-x + 1) = 3,6; \quad 3) 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,4;$$

$$4) 7\cos\left(2 - \frac{x}{2}\right) = -5,8;$$

$$5) 4\cos\left(3x - \frac{2\pi}{7}\right) = -2,1; \quad 6) 6\cos\left(-\frac{5x}{4} + \pi\right) = 1.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{7}\right) = 3;$$

$$2) 5\sin(1 - 2x) = 3;$$

$$3) 6\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = -1;$$

$$4) 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = 1,5;$$

$$5) 7\sin(5x - 2) = -6;$$

$$6) 2\sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) = 1,4;$$

$$7) 8\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5,7;$$

$$8) 5\sin(4x - 3) = -4.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 18;$$

$$2) 5\operatorname{tg}(1 - x) = -4;$$

$$3) 4\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2,5;$$

$$4) 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = 0,7;$$

$$5) 7\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2x}{5}\right) = 3;$$

$$6) 6\operatorname{tg}(4x - 2) = -5;$$

$$7) 5\operatorname{tg}(3 - 5x) = 6;$$

$$8) 8\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = -6..$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 2;$$

$$2) 5\operatorname{ctg}(1 - 2x) = -3; \quad 3) 3\operatorname{ctg}\left(-5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1,8;$$

$$4) 6\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right) = 4,8;$$

$$5) 2\operatorname{ctg}(4x - 2) = -0,9; \quad 6) 7\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{x}{2}\right) = 5.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(\frac{3x - 5}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin(3x + 4) = \frac{2}{3};$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = 1;$$

$$4) \sin(\pi x - 2) = -1.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$;

2) $(3 \operatorname{Atg} x + 5)(1 - 2 \cos x) = 0$;

3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$;

4) $(3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \left(\sin \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$;

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right) (\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{Atg} \frac{x}{3} \right) (2 - \sqrt{3} \cos x) = 0$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{2}$;

2) $(1 + \cos x) \left(\frac{1}{\sin x} - 1 \right) = 0$;

3) $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$;

4) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0$.

9. Знайдіть усі розв'язки рівняння, які задовольняють зазначену умову:

1) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq x \leq \pi$;

2) $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1, -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$;

4) $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

5) $\operatorname{ctg}(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 < x < 2\pi$;

6) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) = 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

10. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[-\pi; 2\pi]$:

1) $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;

3) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[-\pi; \pi]$:

1) $3,2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{5x}{3} \right) = -1,8$;

2) $\sqrt{5} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + 0,9 \right) = 2,7$;

3) $6,8 \operatorname{tg}(0,7x - 2) = 5,4$;

4) $\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) = -3,2$;

5) $4,1 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{7x}{4} \right) = -2,2$;

6) $\sqrt{7} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} + 0,8 \right) = 3,7$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2(0,1x - 1) = 1$;

2) $\sin 3x = \sin 2x$;

3) $\cos x = \cos 7x$;

4) $\operatorname{tg}(5x + 1) = \operatorname{tg}(4x - 1)$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \sin x - 3}{3 \sin x + 1} = -\frac{4}{5}$;

2) $\frac{2}{\cos^2 x - 1} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x - 1} = \frac{1}{\cos x - 1}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x \cos x \cos 2x = 0,125$;

2) $8 \cos x \sin x (\sin x - \cos x) (\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\pi \sin x = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|;$

2) $\operatorname{tg} |x| = \operatorname{tg} x|;$

3) $\frac{11}{2} + \cos \pi x = |x - 3| + |x + 3|;$

4) $|\sin x| + |\cos x| = 1,4.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos \left(3\pi \cos \frac{\pi}{2} x \right) = -1;$

2) $\sin \left(\frac{5}{3} \pi \cos \pi x \right) = \frac{1}{2};$

3) $\operatorname{tg}(3 \operatorname{tg} 2\pi x) = -1;$

4) $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} \cos 2\pi x \right) = \sqrt{3}.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3} \right) = 1;$

2) $\sin x = 2 \sin 47^\circ \cdot \cos 44^\circ.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $|\cos x| = \cos x - 2 \sin x;$

2) $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x};$

3) $\frac{\cos x}{|\cos x|} = 2 \sin x;$

4) $2\pi \sin x = |x| - |x - 2\pi|.$

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язання будь-якого тригонометричного рівняння, яке було запропоновано в тренувальних вправах.

Рефлексія

1. Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \cos(kx + b) = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, як розв'язувати рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю, як розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я вмію розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння на заданому проміжку.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Вивчення методів наближеного розв'язання рівнянь (чисельних методів).
2. Практичне застосування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду у фізиці (коливання, хвилі, амплітудна модуляція).
3. Розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду з параметрами.
4. Графічні методи розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду.
5. Роль періодичності тригонометричних функцій у множинності розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь.







