

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 12. Розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Робота над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Розв'язування рівнянь виду $A \cos(kx + b) = a$.
3. Розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$.
4. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$.
5. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$.
6. Вибірка коренів рівнянь на заданому проміжку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як зміна параметрів A , k , b впливає на графіки функції $y = A \cos(kx + b)$, $y = A \sin(kx + b)$, $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$, $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$?

2) Чи пов'язані рівняння $A \cos(kx + b) = a$ та $A \sin(kx + b) = a$ із гармонічними коливаннями?

3) Чому інженеру важливо вміти розв'язувати тригонометричні рівняння при проєктуванні механізмів?

4) Як тригонометричні рівняння найпростішого вигляду пов'язані з періодичними явищами в природі?

5) Чи є спільні риси у розв'язуванні усіх видів тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

2. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin 35^\circ + \sin 85^\circ}{\cos 25^\circ}$.м

Відповідь. $\sqrt{3}$.

3. Спростіть вираз $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $\cos 2\alpha$.

4. Укажіть амплітуду гармонічного коливання $y(t) = \frac{3}{7} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь. $\frac{3}{7}$.

5. Знайдіть множину значень функції $y = 2 \cos 3x + 1$.

Відповідь. $[-1; 3]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. В електричному колі змінна напруга змінюється за законом

$$U(t) = 220 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right),$$

де напруга U вимірюється у вольтах, а час t — у секундах. Скільки разів упродовж перших 10 секунд після початку спостереження напруга дорівнюватиме 110 В?

III. Робота над індивідуальними (груповими) проєктами

Якщо вважаєте за потрібне, то можете провести урок по створенню учнями/ученицями індивідуальних (групових) проєктів. Темі проєктів можна обрати із запропонованих на цьому чи попередніх уроках змістової теми або обрати для розв'язування задачі рівнів В або С.

IV. Розв'язування рівнянь виду $A \cos(kx + b) = a$ Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \cos(kx + b) = a$

1. Поділіть обидві частини рівняння на A , отримаєте $\cos(kx + b) = \frac{a}{A}$.
2. Якщо $\frac{a}{A} > 1$ або $\frac{a}{A} < -1$, то рівняння розв'язків не має.
3. Якщо $k < 0$, то скористайтеся парністю функції $y = \cos x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.
4. Якщо $\frac{a}{A} = 1$, $\frac{a}{A} = -1$ або $\frac{a}{A} = 0$, то скористайтеся формулами коренів для особливих випадків:

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5. В усіх інших випадках використайте загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$ та знайдіть аргумент косинуса.
6. Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \cos x$ парна, то перепишемо дане рівняння

у вигляді: $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ або $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) + 1 = 0$.

Розв'язання. $2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm 2\pi - \frac{\pi}{2} + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\pm 2\pi - \frac{\pi}{2} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

V. Розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$ **Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$**
1. Поділіть обидві частини даного рівняння на A , отримаєте $\sin(kx + b) = \frac{a}{A}$.

2. Якщо $\frac{a}{A} > 1$ або $\frac{a}{A} < -1$, то рівняння розв'язків не має.

3. Якщо $k < 0$, то скористаєтеся непарністю функції $y = \sin x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.

4. Якщо $\frac{a}{A} = 1$, $\frac{a}{A} = -1$ чи $\frac{a}{A} = 0$, то скористайтесь формулами коренів для особливих випадків:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

5. В усіх інших випадках використайте загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$ та знайдіть аргумент синуса.

6. Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Ілюстративні приклади

8. Розв'яжіть рівняння $4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = 2\sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \sin x$ непарна, то перепишемо дане рівняння у вигляді: $4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$ або $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{4}$, $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$3x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

9. Розв'яжіть рівняння $3 \sin\left(5x - \frac{1}{2}\right) = 1$.

Розв'язання. $3 \sin\left(5x - \frac{1}{2}\right) = 1, \quad \sin\left(5x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3},$

$$5x - \frac{1}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^k \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{\pi k}{5}.$

VI. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$ Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$. Поділіть обидві частини даного рівняння на A , отримаєте $\operatorname{tg}(kx + b) = \frac{a}{A}$.

- 2.** Якщо $k < 0$, то скористаєтеся непарністю функції $y = \operatorname{tg} x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.
- 3.** Використайте загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та знайдіть аргумент тангенса.
- 4.** Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Ілюстративні приклади

10. Розв'яжіть рівняння $3 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$

11. Розв'яжіть рівняння $5 \operatorname{tg}(2 - 0,1x) = 7$.

Розв'язання. Скористаємось непарністю функції $y = \operatorname{tg} x$ і перепишемо дане рівняння у вигляді: $5 \operatorname{tg}(0,1x - 2) = -7$, $\operatorname{tg}(0,1x - 2) = -\frac{7}{5}$,

$$0,1x - 2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{5}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0,1x = 2 - \operatorname{arctg}\frac{7}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = 20 - 10 \operatorname{arctg}\frac{7}{5} + 10\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $20 - 10 \operatorname{arctg}\frac{7}{5} + 10\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

VII. Розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$ Загальний алгоритм розв'язування рівнянь виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$ 1. Поділіть обидві частини даного рівняння на A , отримаєте $\operatorname{ctg}(kx + b) = \frac{a}{A}$.

2. Якщо $k < 0$, то скористаєтесь непарністю функції $y = \operatorname{ctg} x$ так, щоб коефіцієнт біля x став додатним.
3. Використайте загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ та знайдіть аргумент тангенса.
4. Розв'яжіть лінійне рівняння відносно x .

Ілюстративні приклади

12. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(2 - \frac{x}{4}\right) = -1$.

Розв'язання. Скористаємось непарністю функції $y = \operatorname{ctg} x$ та перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{x}{4} - 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{4} - 2 = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 8 + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{4\pi}{3} + 8 + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

13. Розв'яжіть рівняння $7 \operatorname{ctg}(2x + 1) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg}(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{7}, \quad 2x + 1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$2x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7} - 1 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

VIII. Вибірка коренів рівнянь на заданому проміжку

Нагадаємо алгоритм для вибірки коренів на заданому проміжку.

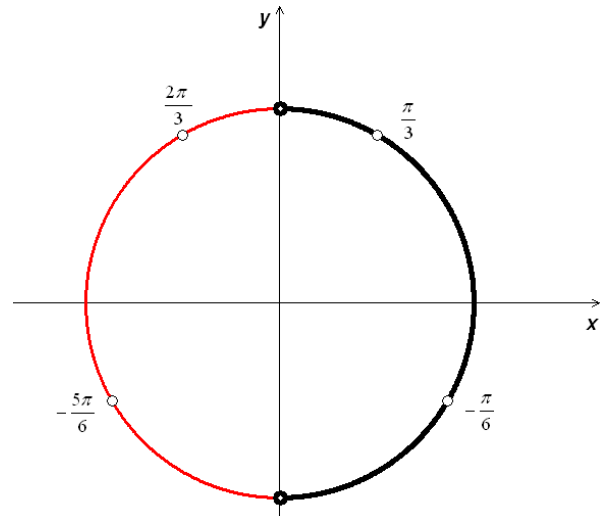
- 1) Знайдіть загальний розв'язок рівняння.
- 2) Запишіть подвійну нерівність для знайденого кореня, наприклад $a < x \leq b$, якщо, за умовою, корені належать проміжку $(a; b]$ та розв'яжіть її.
- 2) Знайдіть усі розв'язки в межах заданого проміжку. Якщо їх важко знайти, то скористайтеся графіком або одиничним колом.

Ілюстративні приклади

- 14.** Знайдіть усі корені рівняння $(2\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$, що задовольняють нерівність $\cos x > 0$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array} \right. \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$



Зобразимо отримані розв'язки на тригонометричному колі. Кожному рівнянню відповідають дві точки на колі. У відповідь запишемо лише ті розв'язки, що розташовані на дузі кола, яка відповідає нерівності $\cos x > 0$, тобто точки, що лежать у I-й та IV-й чвертях.

Отже, нерівності $\cos x > 0$ задовольняють розв'язки $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ або $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ або $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

- 15.** Знайдіть усі розв'язки рівняння $2\cos 5x \cos x = 0$, що належать проміжку $[1; 2]$.

Розв'язання. $\left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}.$

Об'єднаємо множини розв'язків: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Розв'яжемо подвійну нерівність:

$$1 \leq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \leq 2, \quad 10 \leq \pi + 2\pi k \leq 20, \quad 10 - \pi \leq 2\pi k \leq 20 - \pi,$$

$$\frac{10 - \pi}{2\pi} \leq k \leq \frac{20 - \pi}{2\pi}, \quad \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Оскільки $\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{3,2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{16}$, то $\frac{10}{\pi} - \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$ при $k \in \mathbb{Z}$, маємо $k = 2$.

Отже, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

IX. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. В електричному колі змінна напруга змінюється за законом

$$U(t) = 220 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right),$$

де напруга U вимірюється у вольтах, а час t — у секундах. Скільки разів упродовж перших 10 секунд після початку спостереження напруга дорівнюватиме 110 В?

Розв'язання. $220 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 110$, $\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{110}{220}$, $\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

$$100\pi t + \frac{\pi}{6} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 100\pi t + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$100\pi t = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t = \pm \frac{1}{300} - \frac{1}{600} + \frac{n}{50}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{600} + \frac{n}{50}, & n \in \mathbb{Z} \\ t = -\frac{1}{200} + \frac{k}{50}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$1) \quad 0 \leq \frac{1}{600} + \frac{n}{50} \leq 10, \quad 0 \leq 1 + 12n \leq 6000, \quad -1 \leq 12n \leq 5999, \quad -\frac{1}{12} \leq n \leq \frac{5999}{12},$$
$$-\frac{1}{12} \leq n \leq 499\frac{11}{12}.$$

Існує 500 цілих значень n , які задовольняють нерівність.

$$2) \quad 0 \leq -\frac{1}{200} + \frac{k}{50} \leq 10, \quad 0 \leq -1 + 4k \leq 2000, \quad 1 \leq 4k \leq 2001, \quad \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{2001}{4}, \quad \frac{1}{4} \leq k \leq 500\frac{1}{4}.$$

Існує 500 цілих значень k , які задовольняють нерівність.

Таким чином, 1000 разів за перших 10 секунд після початку спостереження напруга дорівнюватиме 110 В.

Відповідь. 1000 разів.

X. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$2) \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$3) \quad \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -1;$$

$$4) \quad \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$5) \quad \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$6) \quad \cos\left(\frac{3x}{2} - \pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \quad \sin(5x - 2) = \frac{1}{2};$$

$$2) \quad \sin(3x + 1) = 0;$$

$$3) \quad \sin\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4) \sin\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 5) \sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) = 0; \quad 6) \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = -1.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad 2) \operatorname{tg}(3x - 1) = 0; \quad 3) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 2\right) = \sqrt{3}; \quad 4) \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -1;$$

$$5) \operatorname{tg}\left(\frac{5x}{3} + \pi\right) = 0; \quad 6) \operatorname{tg}(6x - 2) = -\sqrt{3}; \quad 7) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = 0; \quad 8) \operatorname{tg}\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad 2) \operatorname{ctg}(2x - 1) = 1; \quad 3) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 2\right) = \sqrt{3};$$

$$4) \operatorname{ctg}\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1; \quad 5) \operatorname{ctg}\left(\frac{4x}{5} + \pi\right) = 0; \quad 6) \operatorname{ctg}(6x + 2) = -\sqrt{3}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 2) \sin(3t + 5) = 1; \quad 3) \operatorname{tg}(2x - 1) = 0; \quad 4) \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

6. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[0; 2\pi]$:

$$1) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0; \quad 2) \sin 2x = 1; \quad 3) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$4) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1; \quad 5) \cos 3x = 0; \quad 6) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = -1;$$

$$7) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad 8) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1; \quad 9) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right) = -1;$$

$$10) \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad 11) \operatorname{ctg}(-4x) = 1; \quad 12) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = -1.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3\cos\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right) = 1,7; \quad 2) 5\cos(-x + 1) = 3,6; \quad 3) 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,4;$$

$$4) 7\cos\left(2 - \frac{x}{2}\right) = -5,8; \quad 5) 4\cos\left(3x - \frac{2\pi}{7}\right) = -2,1; \quad 6) 6\cos\left(-\frac{5x}{4} + \pi\right) = 1.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{7}\right) = 3; \quad 2) 5\sin(1 - 2x) = 3;$$

$$3) 6\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = -1; \quad 4) 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = 1,5;$$

$$5) 7\sin(5x - 2) = -6; \quad 6) 2\sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) = 1,4;$$

$$7) 8\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5,7; \quad 8) 5\sin(4x - 3) = -4.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3 \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 18;$$

$$2) 5 \operatorname{tg}(1 - x) = -4;$$

$$3) 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2,5;$$

$$4) 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = 0,7;$$

$$5) 7 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2x}{5}\right) = 3;$$

$$6) 6 \operatorname{tg}(4x - 2) = -5;$$

$$7) 5 \operatorname{tg}(3 - 5x) = 6;$$

$$8) 8 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = -6..$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4 \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 2;$$

$$2) 5 \operatorname{ctg}(1 - 2x) = -3;$$

$$3) 3 \operatorname{ctg}\left(-5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1,8;$$

$$4) 6 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right) = 4,8;$$

$$5) 2 \operatorname{ctg}(4x - 2) = -0,9;$$

$$6) 7 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{x}{2}\right) = 5.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(\frac{3x - 5}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin(3x + 4) = \frac{2}{3};$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = 1;$$

$$4) \sin(\pi x - 2) = -1.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (\operatorname{tg} x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0;$$

$$2) (3 \operatorname{Atg} x + 5)(1 - 2 \cos x) = 0;$$

$$3) (\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0;$$

$$4) (3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(\sin \frac{x}{2} + 1\right) = 0;$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right)(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1) = 0;$$

$$2) \left(1 - \sqrt{3} \operatorname{Atg} \frac{x}{3}\right)(2 - \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

8. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2};$$

$$2) (1 + \cos x)\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) = 0;$$

$$3) \frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0;$$

$$4) \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0.$$

9. Знайдіть усі розв'язки рівняння, які задовольняють зазначену умову:

$$1) \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$2) \sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$3) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4};$$

$$4) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

$$5) \operatorname{ctg}(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 0 < x < 2\pi;$$

$$6) \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

10. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[-\pi; 2\pi]$:

$$1) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \cos 3x = -\frac{1}{2};$$

$$3) \cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Розв'яжіть рівняння на проміжку $[-\pi; \pi]$:

1) $3,2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{5x}{3}\right) = -1,8;$

2) $\sqrt{5} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + 0,9\right) = 2,7;$

3) $6,8 \operatorname{tg}(0,7x - 2) = 5,4;$

4) $\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -3,2;$

5) $4,1 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7x}{4}\right) = -2,2;$

6) $\sqrt{7} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 0,8\right) = 3,7.$

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2(0,1x - 1) = 1;$

2) $\sin 3x = \sin 2x;$

3) $\cos x = \cos 7x;$

4) $\operatorname{tg}(5x + 1) = \operatorname{tg}(4x - 1).$

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \sin x - 3}{3 \sin x + 1} = -\frac{4}{5};$

2) $\frac{2}{\cos^2 x - 1} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x - 1} = \frac{1}{\cos x - 1}.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x \cos x \cos 2x = 0,125;$

2) $8 \cos x \sin x (\sin x - \cos x) (\sin x + \cos x) = \sqrt{3}.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\pi \sin x = \left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \left|x - \frac{3\pi}{4}\right|;$

2) $\operatorname{tg} |x| = |\operatorname{tg} x|;$

3) $\frac{11}{2} + \cos \pi x = |x - 3| + |x + 3|;$

4) $|\sin x| + |\cos x| = 1,4.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(3\pi \cos \frac{\pi}{2} x\right) = -1;$

2) $\sin\left(\frac{5}{3} \pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2};$

3) $\operatorname{tg}(3 \operatorname{tg} 2\pi x) = -1;$

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} \cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3}\right) = 1;$

2) $\sin x = 2 \sin 47^\circ \cdot \cos 44^\circ.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $|\cos x| = \cos x - 2 \sin x;$

2) $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x};$

3) $\frac{\cos x}{|\cos x|} = 2 \sin x;$

4) $2\pi \sin x = |x| - |x - 2\pi|.$

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язання будь-якого тригонометричного рівняння, яке було запропоновано в тренувальних вправах.

XI. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \cos(kx + b) = a$.

	Так	Ще треба потренуватися	Ні
2.	Я знаю, як розв'язувати рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
3.	Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{tg}(kx + b) = a$.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
4.	Я знаю, як розв'язувати рівняння виду $A \operatorname{ctg}(kx + b) = a$.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
5.	Я вмію розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння на заданому проміжку.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
6.	Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні

Можливі теми проєктів

1. Вивчення методів наближеного розв'язання рівнянь (чисельних методів).
2. Практичне застосування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду у фізиці (коливання, хвилі, амплітудна модуляція).
3. Розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду з параметрами.
4. Графічні методи розв'язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду.
5. Роль періодичності тригонометричних функцій у множинності розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь.