

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 13. Функція $y = \arccos x$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

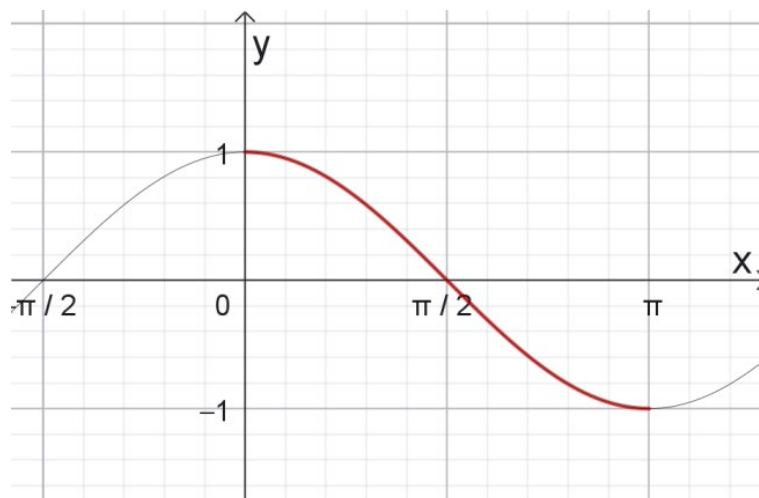
- 1) навчитеся давати означення функції $y = \arccos x$ як функції оберненої до функції $x = \arccos y$;
- 2) навчитеся будувати графік функції $y = \arccos x$ симетричним відображенням графіка функції $x = \arccos y$ відносно прямої $y = x$;
- 3) дізнаєтесь основні властивості функції $y = \arccos x$;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Задайте формулою функцію обернену до функції $y = x^3$.
2. Які особливості мають графіки обернених функцій?
3. Чи має зміст вираз $\arccos \frac{\sqrt{5}}{2}$?
4. Чи правильно, що $\arccos \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$.
5. При якому значенні x із проміжку $[0; \pi]$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

III. Означення функції $y = \arccos x$, як функції оберненої до функції $x = \arccos y$

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0; \pi]$ (див. рисунок).



Оскільки рівняння $\cos x = y$ для будь-якого $y \in [-1; 1]$ має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \arccos y$.

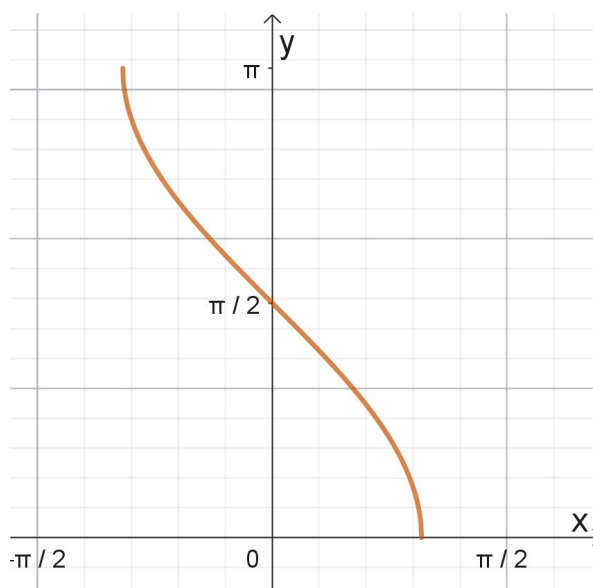
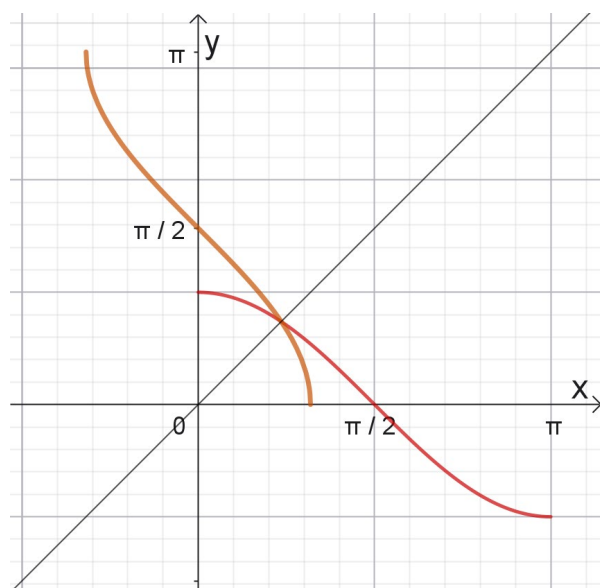
Розглянемо функцію і доведемо, що вона обернена до функції $x = \arccos y$ або до функції $y = \cos x$, область визначення якої є множина $[0; \pi]$.

Доведення. Область визначення функції $y = \arccos x$ збігається з областю значень функції $x = \arccos y$, а також область значень функції $y = \arccos x$ збігається з областю визначення функції $x = \arccos y$. Причому, за цих умов $\cos(\arccos x) = x$, тому функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $x = \arccos y$.

Означення. Функцію, обернену до функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, називають **арккосинусом** і позначають $y = \arccos x$.

IV. Побудова графіка функції $y = \arccos x$, симетричним відображенням графіка функції $x = \arccos y$ відносно прямої $y = x$

Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (див. рисунок).



Тоді графік функції $y = \arccos x$ побудовано на рисунку.

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $y = \arccos(x^2 - 15)$.

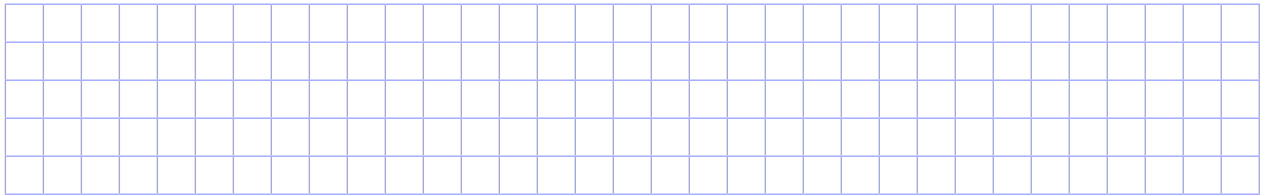
Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції є множина розв'язків нерівності $-1 \leq x^2 - 15 \leq 1$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x^2 \leq 16, \\ x^2 \geq 13; \end{cases} \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{13}, \\ x \geq \sqrt{13}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} -4 \leq x \leq -\sqrt{13}, \\ \sqrt{13} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } D(y) = [-4; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4].$$

$$\text{Відповідь. } D(y) = [-4; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4].$$

Приклад 2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 6 - \arccos 2x$.



Приклад 3. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції

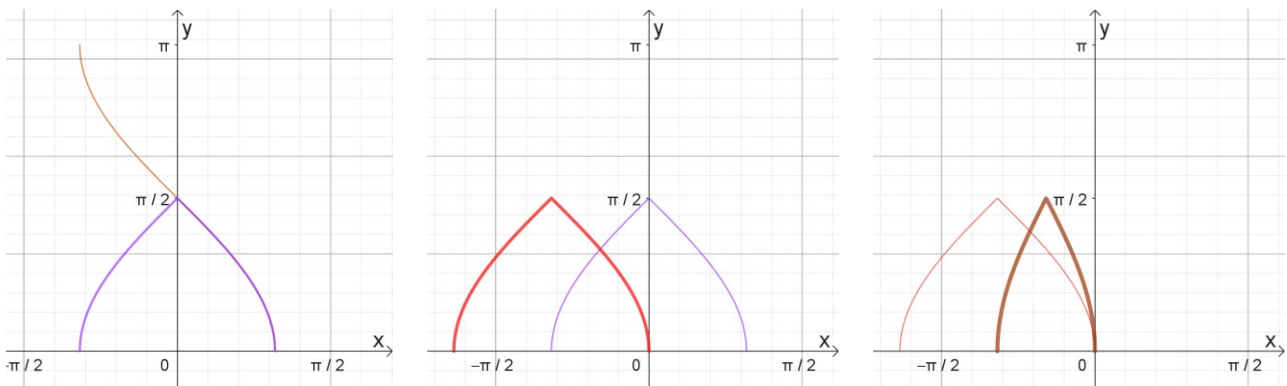
$$y = \arccos|2x + 1|.$$

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arccos x$.

2) Із графіка функції $y = \arccos x$ будуємо графік функції $y = \arccos|x|$. Для цього частину графіка функції $y = \arccos x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.

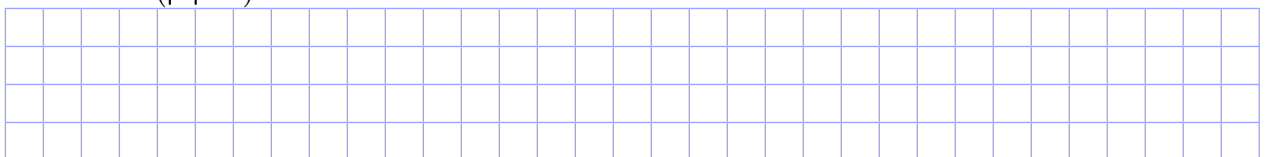
3) Будуємо графік функції $y = \arccos|x + 1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arccos|x|$ на одну одиницю ліворуч уздовж осі абсцис.

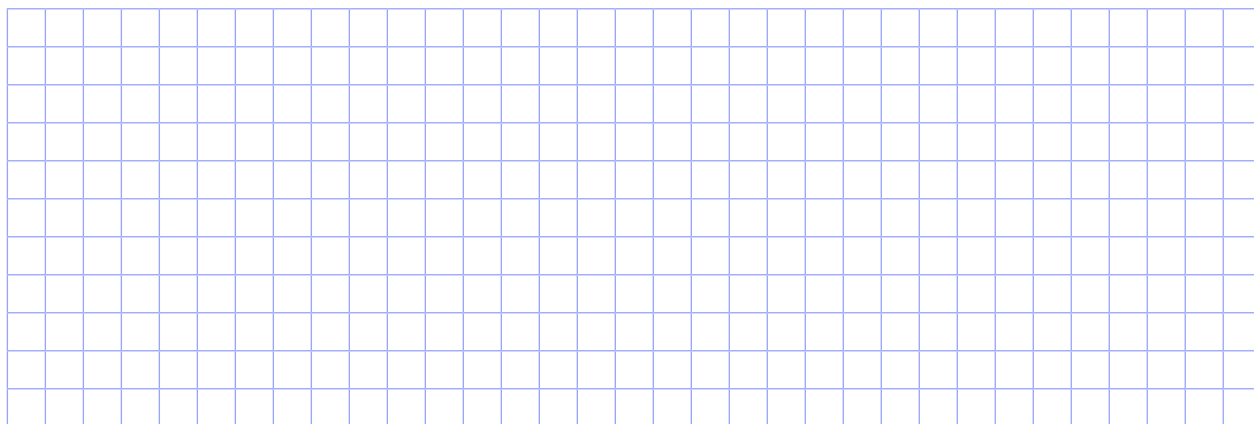
4) Будуємо графік функції $y = \arccos|2x + 1|$ стиснувши вдвічі графік функції $y = \arccos|x + 1|$ до осі ординат.



Приклад 4. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції

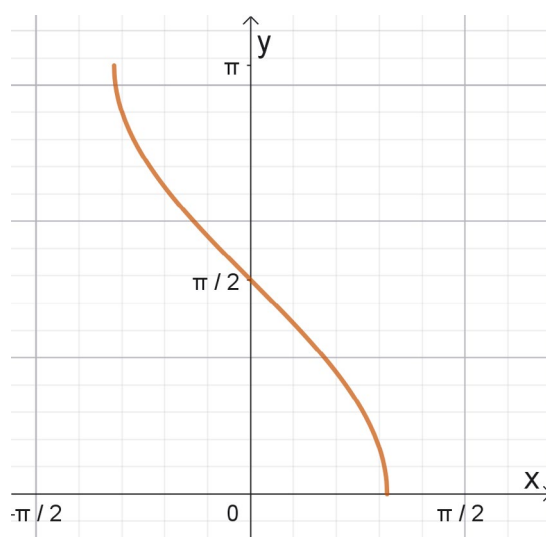
$$y = \arccos(|x| - 1).$$





V. Властивості функції $y = \arccos x$

Графік функції (див. рисунок).



Властивості функції $y = \arccos x$

Область визначення	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$
Парність	Ні парна, ні непарна
Монотонність	Спадна

Приклад 5. Доведіть, що $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Доведення. Нехай $\arccos(-x) = \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$, тоді $\cos \alpha = -x$ або $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha) = x$.

Оскільки $0 \leq \pi - \alpha \leq \pi$, то $\pi - \alpha = \arccos x$, тобто $\alpha = \pi - \arccos x$.

Отже, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, що й треба було довести.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\arccos x = \frac{1}{2}$.

[illegible]

Приклад 7. Знайдіть область значень функції $y = \arccos \sqrt{x} + 4$.

[illegible]

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Навігатор для корегування траєкторії безпілотної, вимірює кут між запланованим вектором траєкторії безпілотної, що направлений на ціль, та реальним вектором-напрямком від пункту запуску до безпілотної. В декартовій системі координат пункт запуску має координати $B(10; 7)$. Координати безпілотної $A(x; x - 0,02x^2)$. Складіть функцію, яка визначатиме кут коригування траєкторії безпілотної, якщо вектор траєкторії $\vec{a}(2; 1)$.

Задача 2. Конкурсна задача. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = 1$. Порівняйте $\arccos \left(-\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right)$

$$\tau_a \frac{19\pi}{24}.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. У якій чверті лежить кут:

1) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arccos 0,01$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 4) $\arccos(-0,7)$?

2. Чи є правильною рівність:

$$\begin{array}{ll} 1) \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi; & 2) \arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}; \\ 3) \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}; & 4) \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12} \end{array}$$

3. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right);$

2) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$

3) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

4) $\cos\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos(x-1);$

2) $y = \arccos\sqrt{x};$

3) $y = \arccos\frac{\pi}{x+4};$

4) $y = \arccos\sqrt{3-x}.$

5. Знайдіть найменше і найбільше значення функції:

1) $y = \arccos x + \frac{\pi}{2};$

2) $y = \arccos x + 2.$

3) $y = \arccos x + \pi;$

4) $y = \arccos x + 1.$

6. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \arccos(x+1);$

2) $y = \arccos x + \frac{\pi}{2};$

3) $y = \frac{1}{2}\arccos x;$

4) $y = 2\arccos x;$

Рівень В

1. Порівняйте:

1) $\arccos\frac{1}{3}$ і $\arccos\frac{2}{7};$

2) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ і $\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right);$

3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}};$

4) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(2x+3) = \frac{\pi}{3};$

2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3};$

3) $\arccos(3x+1) = \frac{\pi}{2};$

4) $\arccos\frac{2x-1}{3} = \pi.$

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(4x-1) > \frac{3\pi}{4};$

2) $\arccos(4-7x) < \frac{5\pi}{6}.$

4. Доведіть, що графік функції $y = \arccos x$ симетричний відносно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(x^2-x) > \arccos(3x-4);$

2) $\arccos(1-2x) < \arccos\frac{1}{x-1}.$

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x|+1);$

2) $y = \arccos\left(\frac{1}{2}|x|-1\right).$

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x+1|);$

2) $y = \frac{1}{2}\arccos(|x-1|).$

- 8.** Розв'яжіть рівняння:
 1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$; 2) $\cos(\arccos(x + 2)) = x + 2$.
- 9.** Розв'яжіть рівняння:
 1) $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$; 2) $\arccos(x^2 - 4) = \arccos(2x + 4)$.
- 10.** Побудуйте графік функції $y = \cos(\arccos x)$.
- 11.** Розмістіть у порядку зростання числа:
 1) $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,7)$; $\arccos 0,6$;
 2) $\arccos 0,4$; $\arccos(-0,8)$; $\arccos(-0,2)$;
 3) $\arccos(-0,7)$; $\arccos 0,2$; $\arccos(-0,5)$;
 4) $\arccos \frac{2}{3}$; $\arccos 0,67$; $\arccos 0,7$.
- 12.** Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = \arccos \sqrt{3 - 2x - x^2}$; 2) $y = \sqrt{3 - x} + \arccos \frac{x - 2}{3}$.

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть рівняння $\arccos^2 x - (a + 1)\arccos x - (a + 2) = 0$ залежно від значень параметра a .
- 2.** Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.
- 3.** Обчисліть:
 1) $\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right)$; 2) $\arccos(\cos 6,28)$; 3) $\arccos(\sin 12)$. 4) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{9}\right)$.
- 4.** Знайдіть функцію, обернену до даної:
 1) $y = \cos(2x + 5)$; 2) $y = \cos(1 - 3x)$; 3) $y = \arccos \frac{2}{x}$; 4) $y = \arccos \frac{3x - 1}{2}$.
- 5.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = -3\arccos|x| - 1$; 2) $y = \arccos(|x| - 3) + \frac{\pi}{6}$;
 3) $y = 2\arccos(2|x| - 2) - \frac{\pi}{3}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\arccos\left(3|x| - \frac{3}{4}\right)$.
- 6.** Доведіть тотожність:
 1) $2\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$; 2) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$.
- 7.** *Творче завдання.* За допомогою графічного калькулятора складіть орнамент, який утворюється за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \arccos x$.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Геометричний зміст функції $y = \arccos x$.
2. Використання функції $y = \arccos x$ у комп'ютерній графіці.
3. Функція $y = \arccos x$ у техніці. Визначення фази коливань.
4. Перетворення графіка функції $y = \arccos x$.
5. Роль функції $y = \arccos x$ у математичному моделюванні положення маятника або точки на колесі, що обертається.







