

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 13. Функція $y = \arccos x$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення функції $y = \arccos x$, як функції оберненої до функції $x = \arccos y$.
2. Побудова графіка функції $y = \arccos x$, симетричним відображенням графіка функції $x = \arccos y$ відносно прямої $y = x$.
3. Властивості функції $y = \arccos x$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) За допомогою якої функції можна знайти кут між двома векторами, якщо відомі їхні координати?

2) Чому не можна обчислювати арккосинуси чисел, які більші за 1?

3) Як би ви використали функцію арккосинуса при створенні комп'ютерної гри чи анімації руху?

4) Чи можна за графіком функції $y = \cos x$ побудувати графік функції $y = \arccos x$?

5) Чи зможете ви пояснити, що таке арккосинус людині, яка ніколи не вивчала тригонометрію?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Задайте формулою функцію обернену до функції $y = x^3$.

Відповідь. $y = \sqrt[3]{x}$.

2. Які особливості мають графіки обернених функцій?

Відповідь. Симетричні відносно прямої $y = x$.

3. Чи має зміст вираз $\arccos \frac{\sqrt{5}}{2}$?

Відповідь. Ні.

4. Чи правильно, що $\arccos \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$.

Відповідь. Ні.

5. При якому значенні x із проміжку $[0; \pi]$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

Як я вирішую певну проблему?

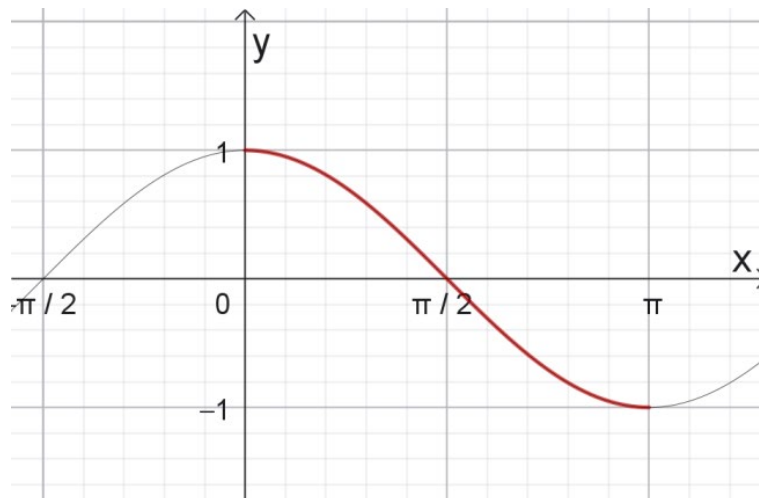
Задача 1. Навігатор для корегування траєкторії безпілотної, вимірює кут між запланованим вектором траєкторії безпілотної, що направлений на ціль, та реальним вектором-напрямком від пункту запуску до безпілотної. В декартовій системі координат пункт запуску має координати $B(10; 7)$. Координати безпілотної $A(x; x - 0,02x^2)$. Складіть функцію, яка визначатиме кут коригування траєкторії безпілотної, якщо вектор траєкторії $\vec{a}(2; 1)$.

Задача 2. Конкурсна задача. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = 1$. Порівняйте $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}}\right)$

та $\frac{19\pi}{24}$.

III. Означення функції $y = \arccos x$, як функції оберненої до функції $x = \arccos y$

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0; \pi]$ (див. рисунок).



Оскільки рівняння $\cos x = y$ для будь-якого $y \in [-1; 1]$ має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \arccos y$.

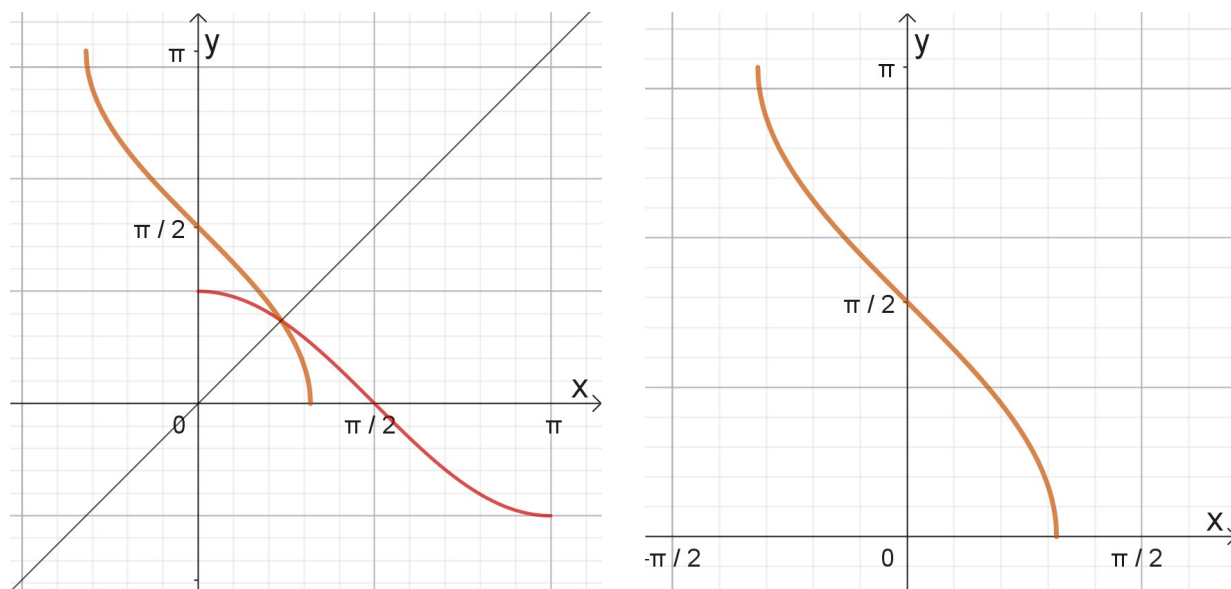
Розглянемо функцію і доведемо, що вона обернена до функції $x = \arccos y$ або до функції $y = \cos x$, область визначення якої є множина $[0; \pi]$.

Доведення. Область визначення функції $y = \arccos x$ збігається з областю значень функції $x = \arccos y$, а також область значень функції $y = \arccos x$ збігається з областю визначення функції $x = \arccos y$. Причому, за цих умов $\cos(\arccos x) = x$, тому функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $x = \arccos y$.

Означення. Функцію, обернену до функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, називають **арккосинусом** і позначають $y = \arccos x$.

IV. Побудова графіка функції $y = \arccos x$, симетричним відображенням графіка функції $x = \arccos y$ відносно прямої $y = x$

Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (див. рисунок).



Тоді графік функції $y = \arccos x$ побудовано на рисунку.

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть область визначення функції $y = \arccos(x^2 - 15)$.

Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції є множина розв'язків нерівності $-1 \leq x^2 - 15 \leq 1$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x^2 \leq 16, \\ x^2 \geq 13; \end{cases} \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{13}, \\ x \geq \sqrt{13}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} -4 \leq x \leq -\sqrt{13}, \\ \sqrt{13} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } D(y) = [-4; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4].$$

$$\text{Відповідь. } D(y) = [-4; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4].$$

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 6 - \arccos 2x$.

Розв'язання. $0 \leq \arccos 2x \leq \pi$, $-\pi \leq -\arccos 2x \leq 0$, $6 - \pi \leq 6 - \arccos 2x \leq 6$.

$$\text{Зазначимо, що } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - \pi, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 6.$$

Відповідь. 6; $6 - \pi$.

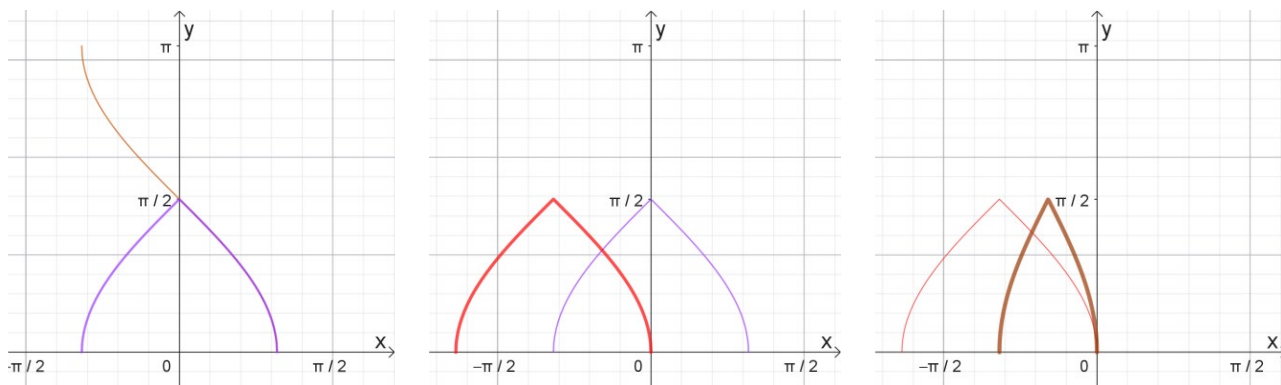
8. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arccos|2x + 1|$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arccos x$.

2) Із графіка функції $y = \arccos x$ будуємо графік функції $y = \arccos|x|$. Для цього частину графіка функції $y = \arccos x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.

3) Будуємо графік функції $y = \arccos|x + 1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arccos|x|$ на одну одиницю ліворуч уздовж осі абсцис.

4) Будуємо графік функції $y = \arccos|2x + 1|$ стиснувши вдвічі графік функції $y = \arccos|x + 1|$ до осі ординат.



9. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arccos(|x| - 1)$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arccos x$.

2) Будуємо графік функції $y = \arccos(x - 1)$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arccos x$ на одну одиницю праворуч уздовж осі абсцис.

3) Із графіка функції $y = \arccos(x + 1)$ будуємо графік функції $y = \arccos(|x| + 1)$. Для цього частину графіка функції $y = \arccos(x + 1)$ де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.



10. Обчисліть $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

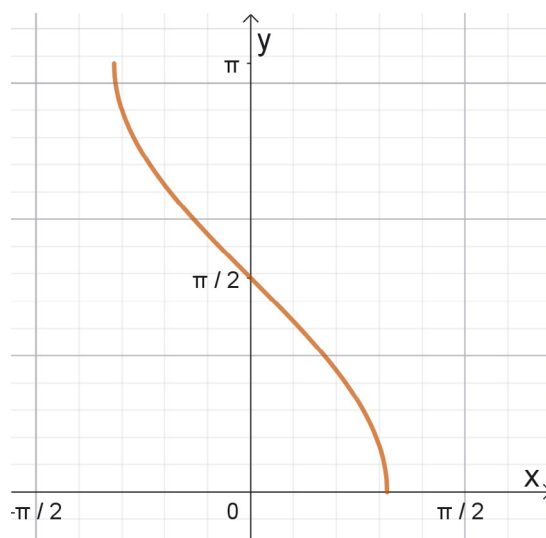
Розв'язання. Нехай $\arccos\frac{1}{3} = \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Оскільки $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то $\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$.

Відповідь. $-\frac{7}{9}$.

V. Властивості функції $y = \arccos x$

Графік функції (див. рисунок).



Властивості функції $y = \arccos x$

Область визначення	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$
Парність	Ні парна, ні непарна
Монотонність	Спадна

Ілюстративні приклади

11. Доведіть, що $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Доведення. Нехай $\arccos(-x) = \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$, тоді $\cos\alpha = -x$ або $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha) = x$.

Оскільки $0 \leq \pi - \alpha \leq \pi$, то $\pi - \alpha = \arccos x$, тобто $\alpha = \pi - \arccos x$.

Отже, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, що й треба було довести.

12. Розв'яжіть рівняння $\arccos x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{2} \in [0; \pi]$, то $\arccos x = \arccos\left(\cos \frac{1}{2}\right)$.

Оскільки функція $y = \arccos x$ є спадною на всій області визначення, то $x = \cos \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\cos \frac{1}{2}$.

13. Розв'яжіть нерівність $\arccos(3x-1) > \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\arccos(3x-1) > \arccos \frac{1}{2}.$$

Оскільки функція $y = \arccos x$ є спадною на всій області визначення, то

$$\begin{cases} 3x-1 < \frac{1}{2}, & \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ 3x-1 \geq -1; \end{cases} \\ x < \frac{1}{2}, & \end{cases}$$

$$\text{Тобто } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Відповідь. } \left[0; \frac{1}{2}\right).$$

14. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$.

$$\text{Розв'язання. } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \arccos x \leq \pi. \end{cases}$$

Оскільки нерівність $\arccos x \leq \pi$ виконується при всіх допустимих значеннях x , то $D(y) = [-1; 1]$.

Відповідь. $[-1; 1]$.

15. Знайдіть область значень функції $y = \arccos \sqrt{x} + 4$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x} \geq 0$, то $0 \leq \arccos \sqrt{x} \leq \frac{\pi}{2}$, $4 \leq \arccos \sqrt{x} + 4 \leq \frac{\pi}{2} + 4$.

Зауважимо, що $y(1) = 4$ і $y(0) = \frac{\pi}{2} + 4$.

$$\text{Отже, } E(y) = \left[4; \frac{\pi}{2} + 4\right].$$

$$\text{Відповідь. } \left[4; \frac{\pi}{2} + 4\right].$$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Навігатор для корегування траєкторії безпілотної, вимірює кут між запланованим вектором траєкторії безпілотної, що направлений на ціль, та реальним вектором-напрямком від пункту запуску до безпілотної. В декартовій системі координат пункт запуску має координати $B(10; 7)$. Координати безпілотної $A(x; x - 0,02x^2)$. Складіть функцію, яка визначатиме кут коригування траєкторії безпілотної, якщо вектор траєкторії $\vec{a}(2; 1)$.

Розв'язання. 1) Знайдемо координати вектора $\vec{BA}$: $\vec{BA}(x-10; x-0,02x^2-7)$.

2) Знайдемо довжину вектора $\vec{BA}$:

$$\begin{aligned} |\vec{BA}| &= \sqrt{(x-10)^2 + (x-0,02x^2-7)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 20x + 100 + x^2 + 0,0004x^4 + 49 - 0,04x^3 - 14x + 0,28x^2} = \\ &= \sqrt{0,0004x^4 - 0,04x^3 + 2,28x^2 - 34x + 149}. \end{aligned}$$

3) Знайдемо довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

4) Скалярний добуток $\vec{BA} \cdot \vec{a}$: $\vec{BA} \cdot \vec{a} = 2x - 20 + x - 0,02x^2 - 7 = -0,02x^2 + 3x - 27$.

5) Знайдемо косинус кута між векторами $\vec{BA}$ і $\vec{a}$:

$$\cos \angle(\vec{BA}; \vec{a}) = \frac{-0,02x^2 + 3x - 27}{\sqrt{0,0004x^4 - 0,04x^3 + 2,28x^2 - 34x + 149} \cdot \sqrt{5}}.$$

Отже, функція, яка визначатиме кут коригування траєкторії має вигляд

$$y = \arccos \frac{-0,02x^2 + 3x - 27}{\sqrt{0,0004x^4 - 0,04x^3 + 2,28x^2 - 34x + 149} \cdot \sqrt{5}}.$$

Відповідь. $y = \arccos \frac{-0,02x^2 + 3x - 27}{\sqrt{0,0004x^4 - 0,04x^3 + 2,28x^2 - 34x + 149} \cdot \sqrt{5}}.$

Задача 2. Конкурсна задача. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = 1$. Порівняйте $\arccos \left(-\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right)$

та $\frac{19\pi}{24}$.

Розв'язання. Якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для деякого цілого числа n .

Тоді $\sin \alpha = (-1)^n \sin \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тоді, перше число дорівнює $\arccos \left(-\sqrt{-\sqrt{2}(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}} \right)$.

Якщо n — парне, то під знаком кореня міститься від'ємне число $-\frac{5}{4}$, тому цей випадок неможливий.

Якщо n — непарне, то під знаком кореня міститься число $\frac{3}{4}$.

У цьому випадку перше число дорівнює

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{24} > \frac{19\pi}{24}.$$

Відповідь. $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha - \frac{1}{4}}\right) > \frac{19\pi}{24}.$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. У якій чверті лежить кут:

1) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arccos 0,01$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 4) $\arccos(-0,7)$?

2. Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$; 2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}$;
3) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$?

3. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
3) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos(x-1)$; 2) $y = \arccos\sqrt{x}$;
3) $y = \arccos\frac{\pi}{x+4}$; 4) $y = \arccos\sqrt{3-x}$.

5. Знайдіть найменше і найбільше значення функції:

1) $y = \arccos x + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arccos x + 2$.
3) $y = \arccos x + \pi$; 4) $y = \arccos x + 1$.

6. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \arccos(x+1)$; 2) $y = \arccos x + \frac{\pi}{2}$;
3) $y = \frac{1}{2}\arccos x$; 4) $y = 2\arccos x$;

Рівень В

1. Порівняйте:

1) $\arccos\frac{1}{3}$ і $\arccos\frac{2}{7}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ і $\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;
3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(2x + 3) = \frac{\pi}{3}$;

2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

3) $\arccos(3x + 1) = \frac{\pi}{2}$;

4) $\arccos \frac{2x-1}{3} = \pi$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(4x - 1) > \frac{3\pi}{4}$;

2) $\arccos(4 - 7x) < \frac{5\pi}{6}$.

4. Доведіть, що графік функції $y = \arccos x$ симетричний відносно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(x^2 - x) > \arccos(3x - 4)$;

2) $\arccos(1 - 2x) < \arccos \frac{1}{x-1}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x| + 1)$;

2) $y = \arccos\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x + 1|)$;

2) $y = \frac{1}{2} \arccos(|x - 1|)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

2) $\cos(\arccos(x + 2)) = x + 2$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$;

2) $\arccos(x^2 - 4) = \arccos(2x + 4)$.

10. Побудуйте графік функції $y = \cos(\arccos x)$.

11. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,7)$; $\arccos 0,6$;

2) $\arccos 0,4$; $\arccos(-0,8)$; $\arccos(-0,2)$;

3) $\arccos(-0,7)$; $\arccos 0,2$; $\arccos(-0,5)$;

4) $\arccos \frac{2}{3}$; $\arccos 0,67$; $\arccos 0,7$.

12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos \sqrt{3 - 2x - x^2}$;

2) $y = \sqrt{3 - x} + \arccos \frac{x-2}{3}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $\arccos^2 x - (a + 1)\arccos x - (a + 2) = 0$ залежно від значень параметра a .

2. Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

3. Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right)$; 2) $\arccos(\cos 6,28)$; 3) $\arccos(\sin 12)$. 4) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{9}\right)$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \cos(2x + 5)$; 2) $y = \cos(1 - 3x)$; 3) $y = \arccos \frac{2}{x}$; 4) $y = \arccos \frac{3x - 1}{2}$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3 \arccos |x| - 1$; 2) $y = \arccos(|x| - 3) + \frac{\pi}{6}$;
3) $y = 2 \arccos(2|x| - 2) - \frac{\pi}{3}$; 4) $y = -\frac{1}{2} \arccos\left(3|x| - \frac{3}{4}\right)$.

6. Доведіть тотожність:

1) $2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$; 2) $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$.

7. **Творче завдання.** За допомогою графічного калькулятора складіть орнамент, який утворюється за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \arccos x$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові
Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.									
1)									
.....									
.....									
2)									
.....									
.....									
?									
.....									
.....									

Можливі теми проєктів

1. Геометричний зміст функції $y = \arccos x$.
2. Використання функції $y = \arccos x$ у комп'ютерній графіці.
3. Функція $y = \arccos x$ у техніці. Визначення фази коливань.
4. Перетворення графіка функції $y = \arccos x$.
5. Роль функції $y = \arccos x$ у математичному моделюванні положення маятника або точки на колесі, що обертається.