

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 13. Функція $y = \arcsin x$

На уроці ви навчитеся:

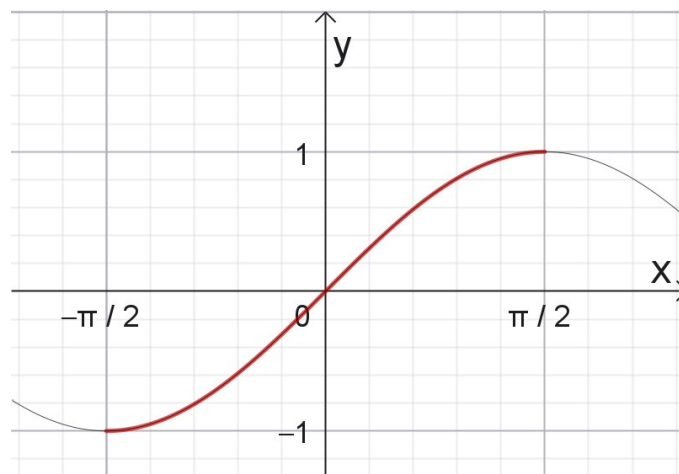
- 1) формулювати означення функції $y = \arcsin x$ як функції оберненої до функції $x = \arcsin y$;
- 2) будувати графік функції $y = \arcsin x$ симетричним відображенням графіка функції $x = \arcsin y$ відносно прямої $y = x$;
- 3) застосовувати основні властивості функції $y = \arcsin x$;
- 4) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$.
2. Спростіть вираз $\frac{\cos(-\beta) - \cos^3(-\beta)}{\sin(-\beta) \cos^2 \beta}$.
3. При яких значеннях x , $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ дорівнює 0,5?
4. Розв'яжіть рівняння $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.
5. Чи має зміст вираз $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$?

III. Означення функції $y = \arcsin x$, як функції оберненої до функції $x = \arcsin y$

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (див. рисунок).



Оскільки рівняння $\sin x = y$ для будь-якого $y \in [-1; 1]$ має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \arcsin y$.

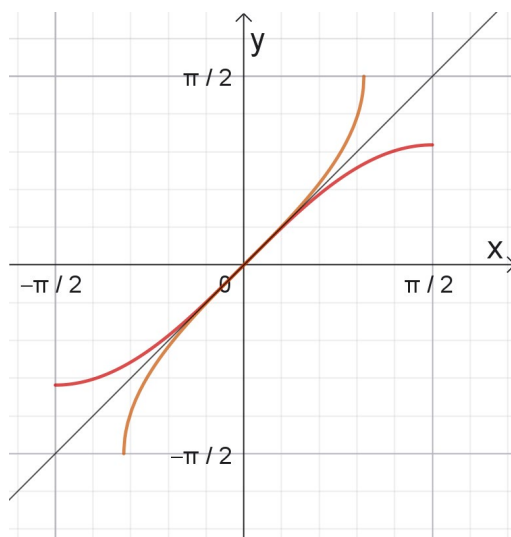
Тепер розглянемо функцію $y = \arcsin x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \arccos y$ або до функції $y = \sin x$, область визначення якої є множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Доведення. Область визначення функції $y = \arcsin x$ збігається з областю значень функції $x = \arcsin y$, а також область значень функції $y = \arcsin x$ збігається з областю визначення функції $x = \arcsin y$. Причому, за цих умов $\sin(\arcsin x) = x$, тому функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції $x = \arcsin y$.

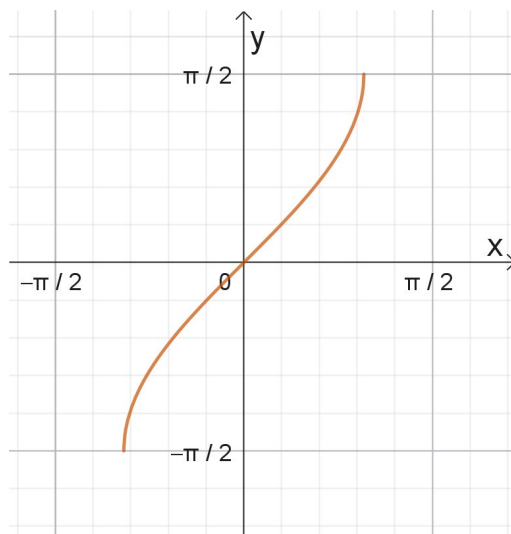
Означення. Функцію, обернену до функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називають **арк-синусом** і позначають $y = \arcsin x$.

IV. Побудова графіка функції $y = \arcsin x$ симетричним відображенням графіка функції $x = \arcsin y$ відносно прямої $y = x$

Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (див. рисунок).



Побудуємо графік функції $y = \arccos x$ (див. рисунок).



Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(9 - 4x^2)$.

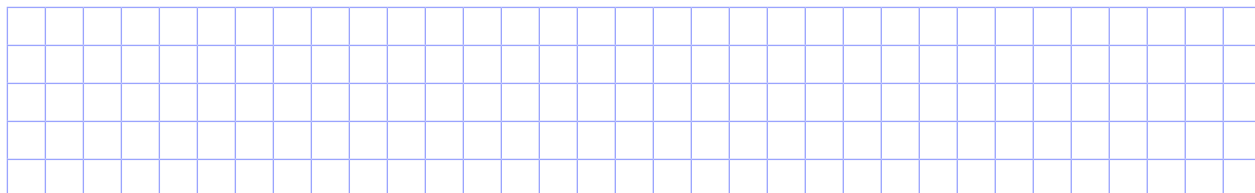
Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції — множина розв'язків нерівності $-1 \leq 9 - 4x^2 \leq 1$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} 4x^2 \leq 10, \\ 4x^2 \geq 8; \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}, \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{2}, \\ x \geq \sqrt{2}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } D(y) = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right].$$

$$\text{Відповідь. } D(y) = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right].$$

Приклад 2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$.

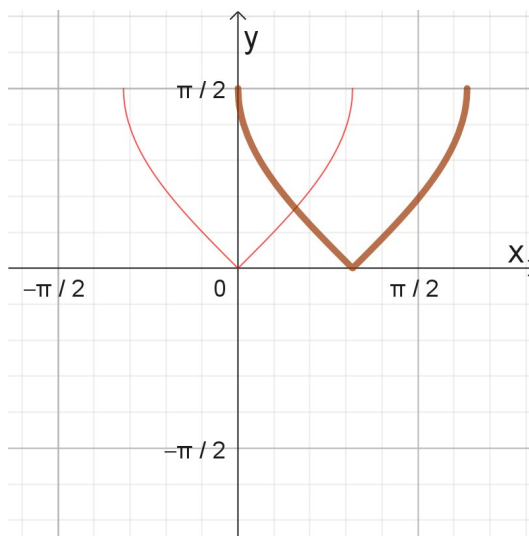
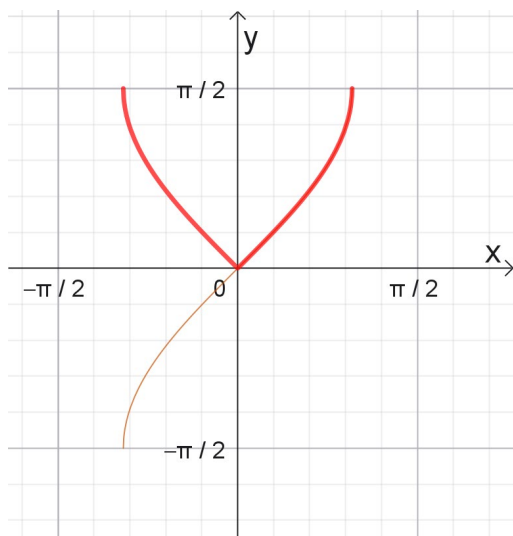


Приклад 3. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arcsin|x - 1|$.

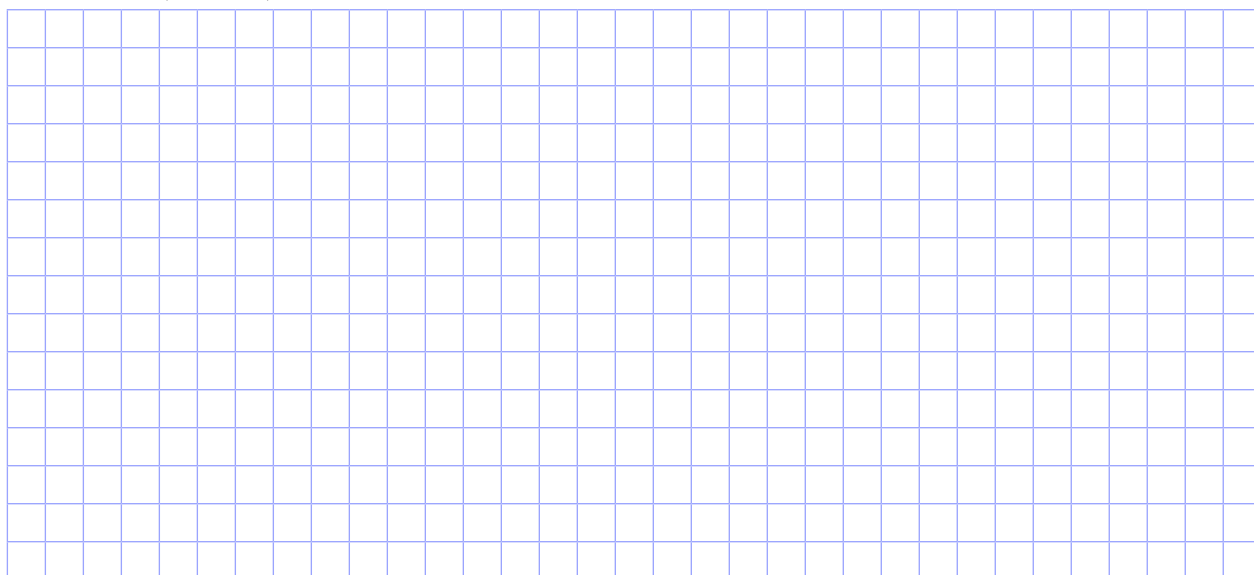
Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arcsin x$.

2) Із графіка функції $y = \arccos x$ будуємо графік функції $y = \arcsin|x|$. Для цього частину графіка функції $y = \arcsin x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.

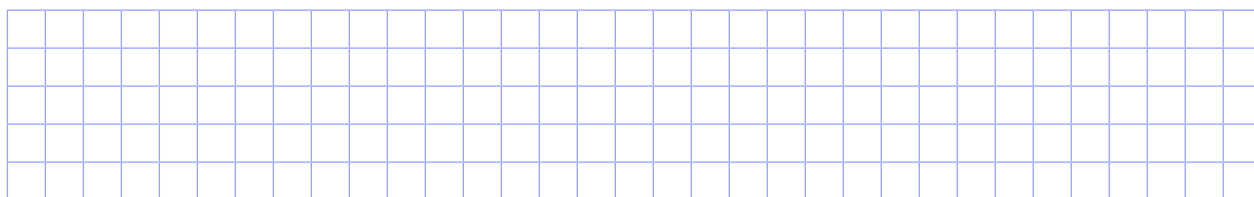
3) Будуємо графік функції $y = \arcsin|x - 1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arcsin|x|$ на одну одиницю праворуч уздовж осі абсцис.



Приклад 4. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arcsin(2|x| - 1)$.



Приклад 5. Обчисліть: $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час експерименту маятник здійснює гармонічне коливання, яке задається рівнянням $x(t) = A \sin(\omega t)$, де $x(t)$ — зміщення від положення рівноваги (у метрах), A — амплітуда коливань (у метрах), ω — кутова частота (у рад/с), t — час (у секундах). Лаборант визначив, що при амплітуді 0,4 м маятник через 0,3 с мав зміщення 0,2 м. Визначте кутову частоту даного коливання.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(2|\arcsin x|) = 1$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. У якій чверті лежить кут:

1) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arcsin 0,1$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)$; 4) $\arcsin(-0,6)$?

2. Обчисліть:

1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 2) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\sin(4\arcsin 1)$; 2) $\cos(6\arcsin 1)$; 3) $\sin\left(3\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin \frac{1}{2}\right)$; 5) $\cos\left(5\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(4\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(1-x)$; 2) $y = \arcsin \sqrt{x}$;
3) $y = \arcsin \frac{\pi}{x+2}$; 4) $y = \arcsin \sqrt{x-4}$.

5. Знайдіть найменше і найбільше значення функції:

1) $y = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arcsin x + 2$.
3) $y = \pi - \arcsin x$; 4) $y = 1 - \arcsin x$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(x-1)$; 2) $y = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$;
3) $y = 2\arcsin x$; 4) $y = -\frac{1}{2}\arcsin x$;

Рівень В

1. Порівняйте:

1) $\arcsin \frac{2}{3}$ і $\arcsin \frac{3}{4}$;

2) $\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ і $\arcsin \left(-\sqrt{\frac{2}{5}} \right)$;

3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$;

4) $\arcsin \left(-\frac{2}{3} \right)$ і $\arcsin \left(-\frac{3}{4} \right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$;

2) $\arcsin \frac{x+1}{3} = -\frac{\pi}{3}$;

3) $\arcsin(3x + 1) = \frac{\pi}{2}$;

4) $\arcsin \frac{2x-1}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(1 - 3x) < -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin(5 - 2x) > \frac{\pi}{6}$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1-3x}{2}$;

2) $y = \arcsin \frac{1-\sqrt{x}}{2}$;

3) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$;

4) $y = \arcsin \frac{2x^2-5}{3}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(x^2 - x) > \arcsin(3x - 4)$;

2) $\arcsin(1 - 2x) < \arcsin \frac{1}{x-1}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(|x| + 1)$;

2) $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\arcsin(|x + 1|)$;

2) $y = \frac{1}{2}\arcsin(|x - 1|)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(\arcsin(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

2) $\sin(\arcsin(x + 2)) = x + 2$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(3x + 2) = \arcsin(5x + 3)$;

2) $\arcsin(x^2 - 4) = \arcsin(2x + 4)$.

10. Побудуйте графік функції $y = \sin(\arcsin x)$.

11. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\arcsin 0,9$; $\arcsin(-0,7)$; $\arcsin 0,6$;

2) $\arcsin 0,4$; $\arcsin(-0,8)$; $\arcsin(-0,2)$;

3) $\arcsin(-0,7)$; $\arcsin 0,2$; $\arcsin(-0,5)$;

4) $\arcsin \frac{2}{3}$; $\arcsin 0,67$; $\arcsin 0,7$.

12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \sqrt{3 - 2x - x^2}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin \frac{x-2}{3}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $\arcsin^2 x - (a+1)\arcsin x - (a+2) = 0$ залежно від значень параметра a .
2. Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.
3. Обчисліть:
 1) $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{9}\right)$; 2) $\arcsin(\cos 6,28)$; 3) $\arcsin(\sin 12)$. 4) $\arcsin\left(\sin \frac{11\pi}{9}\right)$.
4. Знайдіть функцію, обернену до даної:
 1) $y = \sin(2x+5)$; 2) $y = \sin(1-3x)$; 3) $y = \arcsin \frac{2}{x}$; 4) $y = \arcsin \frac{3x-1}{2}$.
5. Побудуйте графік функції:
 1) $y = -2\arcsin |x| - \frac{\pi}{3}$; 2) $y = \arcsin(|x|-3) + \frac{\pi}{6}$;
 3) $y = 2\arcsin(2|x|-2) - \frac{\pi}{3}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\arcsin\left(3|x| - \frac{3}{4}\right)$.
6. Розв'яжіть рівняння $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.
7. **Творче завдання.** Створіть веб сторінку з властивостями і графіком функції $y = \arcsin x$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Історичні аспекти появи обернених тригонометричних функцій.
2. Використання функції $y = \arcsin x$ у фізиці.
3. Функція $y = \arcsin x$ у задачах навігації та GPS.
4. Порівняння властивостей і графіків функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$.
5. Дослідження точності обчислень арксинуса.







