

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 13. Функція $y = \arcsin x$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення функції $y = \arcsin x$ як функції оберненої до функції $x = \arcsin y$.
2. Побудова графіка функції $y = \arcsin x$ симетричним відображенням графіка функції $x = \arcsin y$ відносно прямої $y = x$.
3. Властивості функції $y = \arcsin x$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 MAO 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 MAO 3.2.1–1 П];

обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування [12 MAO 4.3.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна за значенням синуса визначити кут?
- 2) Якщо функція $y = \sin x$ описує коливання маятника, то які процеси описує функція $y = \arcsin x$?
- 3) У яких ситуаціях потрібно знаходити кут за відомим значенням синуса кута?
- 4) Якщо синуси двох кутів рівні, то чи рівні ці кути?
- 5) Якщо функція синус перетворює кут на число, то яке застосування функції арксинуса?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$.
Відповідь. 0,5.
2. Спростіть вираз $\frac{\cos(-\beta) - \cos^3(-\beta)}{\sin(-\beta) \cos^2 \beta}$.
Відповідь. $-\operatorname{tg} \beta$.
3. При яких значеннях x , $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ дорівнює 0,5?
Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
4. Розв'яжіть рівняння $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.
Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
5. Чи має зміст вираз $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$?
Відповідь. Так.

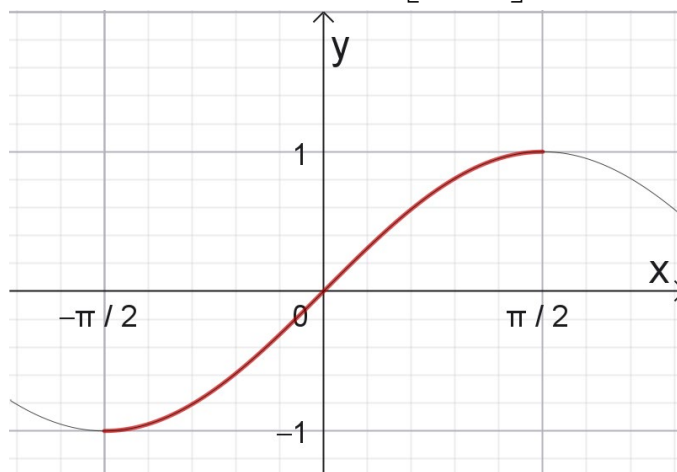
Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час експерименту маятник здійснює гармонічне коливання, яке задається рівнянням $x(t) = A \sin(\omega t)$, де $x(t)$ — зміщення від положення рівноваги (у метрах), A — амплітуда коливань (у метрах), ω — кутова частота (у рад/с), t — час (у секундах). Лаборант визначив, що при амплітуді 0,4 м маятник через 0,3 с мав зміщення 0,2 м. Визначте кутову частоту даного коливання.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(2|\arcsin x|) = 1$.

III. Означення функції $y = \arcsin x$, як функції оберненої до функції $x = \arcsin y$

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (див. рисунок).



Оскільки рівняння $\sin x = y$ для будь-якого $y \in [-1; 1]$ має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \arcsin y$.

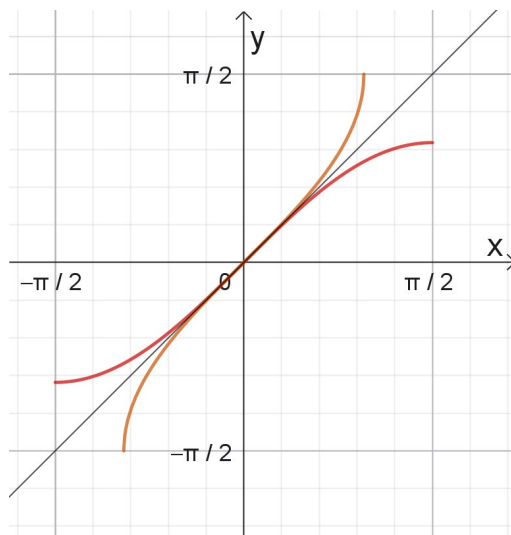
Тепер розглянемо функцію $y = \arcsin x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \arccos y$ або до функції $y = \sin x$, область визначення якої є множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Доведення. Область визначення функції $y = \arcsin x$ збігається з областю значень функції $x = \arcsin y$, а також область значень функції $y = \arcsin x$ збігається з областю визначення функції $x = \arcsin y$. Причому, за цих умов $\sin(\arcsin x) = x$, тому функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції $x = \arcsin y$.

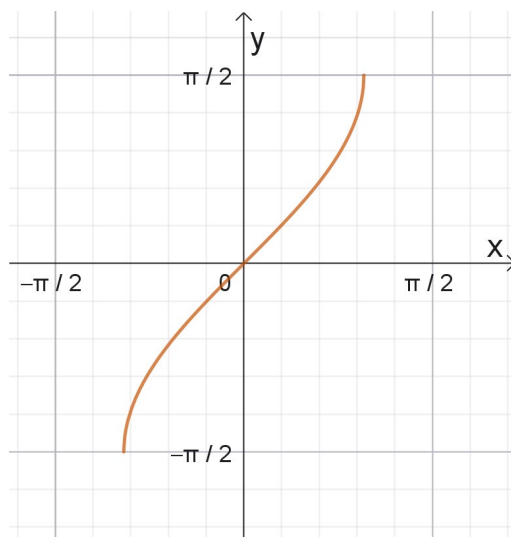
Означення. Функцію, обернену до функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називають **арк-синусом** і позначають $y = \arcsin x$.

IV. Побудова графіка функції $y = \arcsin x$ симетричним відображенням графіка функції $x = \arcsin y$ відносно прямої $y = x$

Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (див. рисунок).



Побудуємо графік функції $y = \arccos x$ (див. рисунок).



Ілюстративні приклади

6. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(9 - 4x^2)$.

Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції — множина розв'язків нерівності $-1 \leq 9 - 4x^2 \leq 1$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} 4x^2 \leq 10, \\ 4x^2 \geq 8; \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}, \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{2}, \\ x \geq \sqrt{2}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$$

Отже, $D(y) = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$.

Відповідь. $D(y) = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$.

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arcsin x + \frac{\pi}{2} \leq \pi$.

Зазначимо, що $f(-1) = 0$, $f(1) = \pi$.

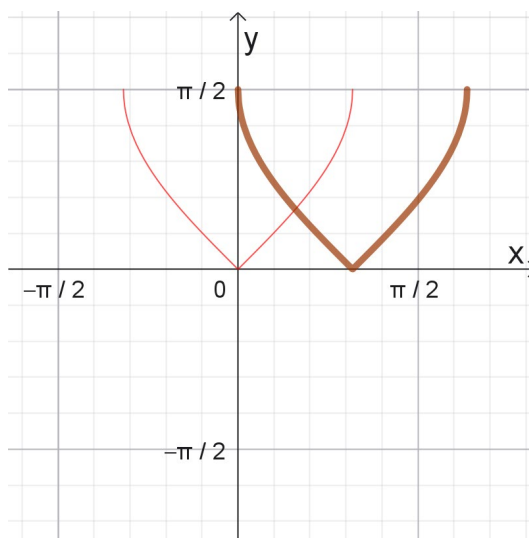
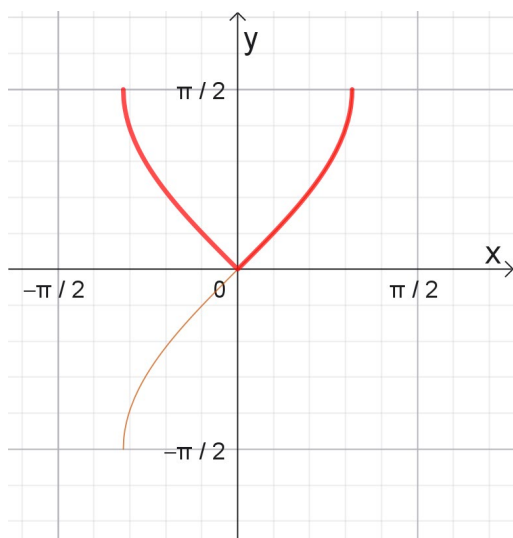
Відповідь. π ; 0 .

8. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arcsin|x-1|$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arcsin x$.

2) Із графіка функції $y = \arccos x$ будуємо графік функції $y = \arcsin|x|$. Для цього частину графіка функції $y = \arcsin x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.

3) Будуємо графік функції $y = \arcsin|x-1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arcsin|x|$ на одну одиницю праворуч уздовж осі абсцис.



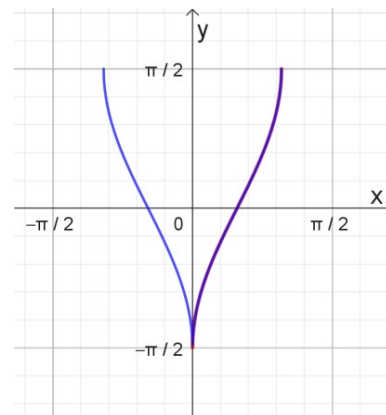
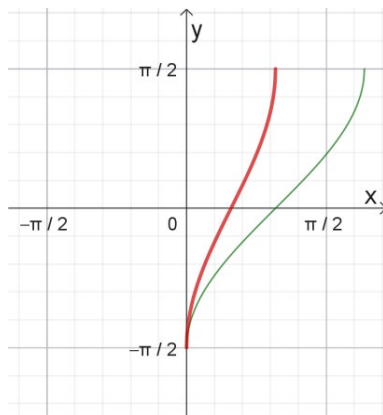
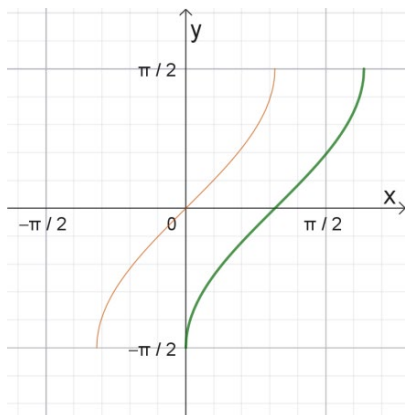
9. За геометричними перетвореннями, побудуйте графік функції $y = \arcsin(2|x|-1)$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \arcsin x$.

2) Будуємо графік функції $y = \arcsin(x-1)$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arcsin x$ на одну одиницю праворуч уздовж осі абсцис.

3) Будуємо графік функції $y = \arcsin(2x-1)$. Для цього «стиснемо» графік функції $y = \arcsin(x-1)$ удвічі до осі Oy .

4) Із графіка функції $y = \arcsin(2x-1)$ будуємо графік функції $y = \arcsin(2|x|-1)$. Для цього частину графіка функції $y = \arcsin(2x-1)$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат.



10. Обчисліть: $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

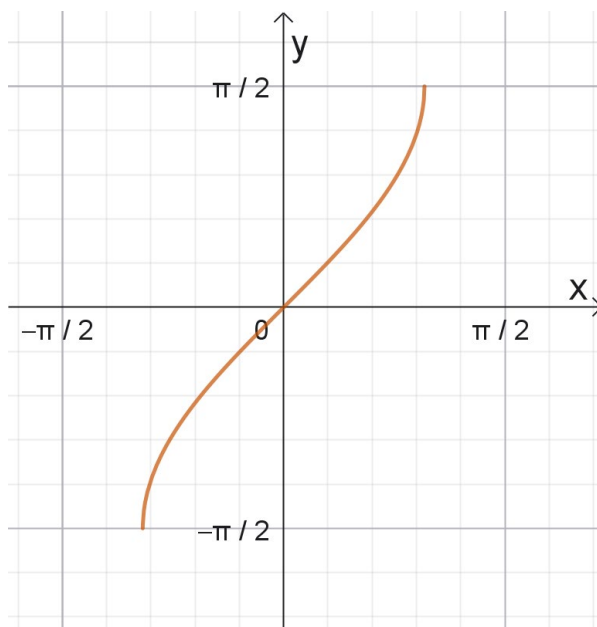
$$\text{Тоді } \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0,96.$$

Відповідь. 0,96.

V. Властивості функції $y = \arcsin x$

Графік функції (див. рисунок).



Властивості функції $y = \arcsin x$

Область визначення	$[-1; 1]$
Область значень	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$; якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$.
Парність	Функція непарна
Монотонність	Зростаюча

Ілюстративні приклади

- 11.** Доведіть, що $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Доведення. Нехай $\arcsin(-x) = \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тоді $\sin \alpha = -x$ або $-\sin \alpha = \sin(-\alpha) = x$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq -\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\alpha = \arcsin x$, тобто $\alpha = -\arcsin x$.

Отже, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, що й треба було довести.

- 12.** Розв'яжіть рівняння $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то рівняння $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$ коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

- 13.** Розв'яжіть нерівність $\arcsin(5-3x) < -\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\arcsin(3x-5) > \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin(3x-5) > \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Оскільки функція $y = \arcsin x$ є зростаючою на всій області визначення, то

$$\begin{cases} 3x-5 > \frac{\sqrt{3}}{2}, & \begin{cases} x > \frac{\sqrt{3}+10}{6}, \\ 3x-5 \leq 1; & x \leq 2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Тобто } x \in \left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right].$$

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right].$$

- 14.** Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$.

$$\text{Розв'язання. } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Оскільки нерівність $\arcsin x \geq \frac{\pi}{2}$ виконується лише при $x = 1$, то $D(y) = \{1\}$.

Відповідь. $D(y) = \{1\}$.

15. Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$.

Розв'язання. З умови випливає, що $\sqrt{\arcsin x} > 0$, тому, враховуючи зростання функції $y = \arcsin x$ маємо: $0 < \sqrt{\arcsin x} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

За властивістю нерівностей $\frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} > \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, тобто $E(y) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$

Відповідь. $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час експерименту маятник здійснює гармонічне коливання, яке задається рівнянням $x(t) = A \sin(\omega t)$, де $x(t)$ — зміщення від положення рівноваги (у метрах), A — амплітуда коливань (у метрах), ω — кутова частота (у рад/с), t — час (у секундах). Лаборант визначив, що при амплітуді 0,4 м маятник через 0,3 с мав зміщення 0,2 м. Визначте кутову частоту даного коливання.

Розв'язання. Оскільки $x(t) = A \sin(\omega t)$, то $\sin(\omega t) = \frac{x}{A}$ або $\omega = \frac{1}{t} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)$,

$$\omega = \frac{1}{0,3} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \approx 1,745 \text{ (рад/с)}.$$

Відповідь. 1,745 рад/с.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(2|\arcsin x|) = 1$.

Розв'язання. $2|\arcsin x| = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $|\arcsin x| = \frac{4n+1}{4} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\arcsin x = \pm \frac{4n+1}{4} \pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Число виду $\pm \frac{4n+1}{4} \pi$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тоді і тільки тоді, коли $n = 0$.

$$\text{Отже, } \arcsin x = \pm \frac{\pi}{4}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. У якій чверті лежить кут:

1) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arcsin 0,1$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)$; 4) $\arcsin(-0,6)$?

2. Обчисліть:

1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 2) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\sin(4 \arcsin 1)$; 2) $\cos(6 \arcsin 1)$; 3) $\sin\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{2}\right)$; 5) $\cos\left(5 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(1-x)$; 2) $y = \arcsin \sqrt{x}$;
3) $y = \arcsin \frac{\pi}{x+2}$; 4) $y = \arcsin \sqrt{x-4}$.

5. Знайдіть найменше і найбільше значення функції:

1) $y = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arcsin x + 2$.
3) $y = \pi - \arcsin x$; 4) $y = 1 - \arcsin x$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(x-1)$; 2) $y = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$;
3) $y = 2 \arcsin x$; 4) $y = -\frac{1}{2} \arcsin x$;

Рівень В

1. Порівняйте:

1) $\arcsin \frac{2}{3}$ і $\arcsin \frac{3}{4}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ і $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$;
3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ і $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(2x-3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin \frac{x+1}{3} = -\frac{\pi}{3}$;
3) $\arcsin(3x+1) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin \frac{2x-1}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(1 - 3x) < -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin(5 - 2x) > \frac{\pi}{6}$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1 - 3x}{2}$;

2) $y = \arcsin \frac{1 - \sqrt{x}}{2}$;

3) $y = \arcsin \frac{x - 3}{2}$;

4) $y = \arcsin \frac{2x^2 - 5}{3}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(x^2 - x) > \arcsin(3x - 4)$;

2) $\arcsin(1 - 2x) < \arcsin \frac{1}{x - 1}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(|x| + 1)$;

2) $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\arcsin(|x + 1|)$;

2) $y = \frac{1}{2}\arcsin(|x - 1|)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(\arcsin(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

2) $\sin(\arcsin(x + 2)) = x + 2$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(3x + 2) = \arcsin(5x + 3)$;

2) $\arcsin(x^2 - 4) = \arcsin(2x + 4)$.

10. Побудуйте графік функції $y = \sin(\arcsin x)$.

11. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\arcsin 0,9$; $\arcsin(-0,7)$; $\arcsin 0,6$;

2) $\arcsin 0,4$; $\arcsin(-0,8)$; $\arcsin(-0,2)$;

3) $\arcsin(-0,7)$; $\arcsin 0,2$; $\arcsin(-0,5)$;

4) $\arcsin \frac{2}{3}$; $\arcsin 0,67$; $\arcsin 0,7$.

12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \sqrt{3 - 2x - x^2}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin \frac{x - 2}{3}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $\arcsin^2 x - (a + 1)\arcsin x - (a + 2) = 0$ залежно від значень параметра a .

2. Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

3. Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{9}\right)$; 2) $\arcsin(\cos 6,28)$; 3) $\arcsin(\sin 12)$. 4) $\arcsin\left(\sin \frac{11\pi}{9}\right)$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \sin(2x + 5)$; 2) $y = \sin(1 - 3x)$; 3) $y = \arcsin \frac{2}{x}$; 4) $y = \arcsin \frac{3x - 1}{2}$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2 \arcsin |x| - \frac{\pi}{3}$;

2) $y = \arcsin(|x| - 3) + \frac{\pi}{6}$;

3) $y = 2 \arcsin(2|x| - 2) - \frac{\pi}{3}$;

4) $y = -\frac{1}{2} \arcsin\left(3|x| - \frac{3}{4}\right)$.

6. Розв'яжіть рівняння $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

7. Творче завдання. Створіть веб сторінку з властивостями і графіком функції $y = \arcsin x$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

4) Найскладнішим для мене було

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Історичні аспекти появи обернених тригонометричних функцій.
- 2.** Використання функції $y = \arcsin x$ у фізиці.
- 3.** Функція $y = \arcsin x$ у задачах навігації та GPS.
- 4.** Порівняння властивостей і графіків функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$.
- 5.** Дослідження точності обчислень арксинуса.