

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 15. **Урок —практикум. Розв’язування задач з використанням властивостей функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$. Формула суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) знаходити області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$;
- 2) знаходити множини значень та найбільше й найменше значення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$;
- 3) використовувати формули, що визначають взаємну оберненість функцій;
- 4) застосовувати формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу;
- 5) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $\sin\left(\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.
2. Якого найменшого значення набуває функція $f(x) = 2\sin 3x - 2$?
3. Розв’яжіть рівняння $\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x = \frac{1}{2}$.
4. Розв’яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Розв’яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

III. Знаходження області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$

При знаходженні області визначення функцій $y = \arccos f(x)$ та $y = \arcsin f(x)$ крім області визначення функції $f(x)$ потрібно враховувати також, що $-1 \leq f(x) \leq 1$.

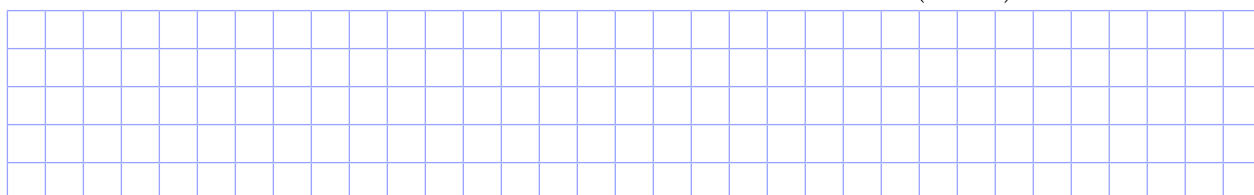
Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \arcsin(x-2)$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо з умови:

$$-1 \leq x-2 \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Відповідь. $D(f) = [1; 3]$.

Приклад 2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \arccos(x^2-1)$.



IV. Знаходження множини значень функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$ та їхніх найбільших (найменших) значень

Для знаходження множини значень функцій, пов'язаних із функціями $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$ корисно пам'ятати, що $0 \leq \arccos x \leq \pi$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, а також знати властивості числових нерівностей.

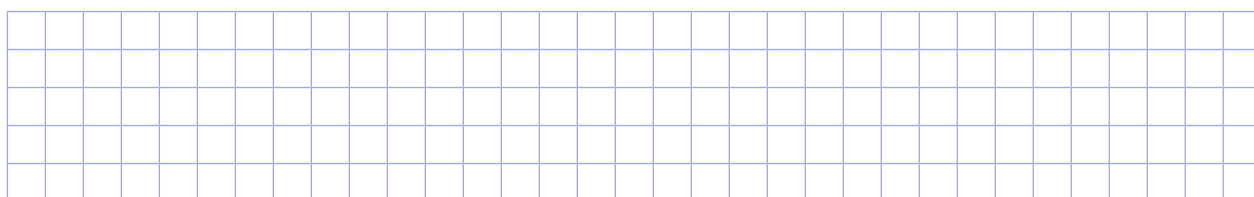
Приклад 3. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} + \pi$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \geq 0$, то $0 \leq \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Тоді } \pi \leq \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Відповідь. $E(f) = \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

Приклад 3. Знайдіть множину значень функції $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \arccos 2x$.



V. Використання формул, що визначають взаємну оберненість функцій

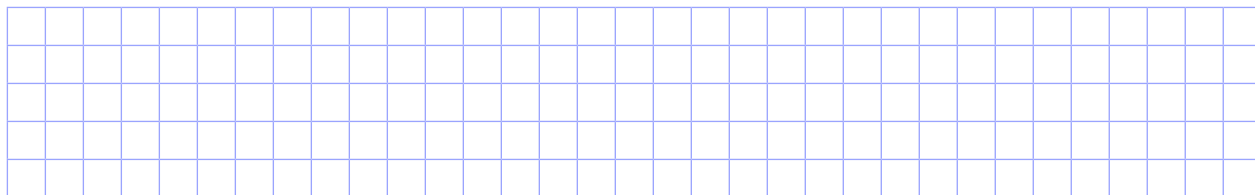
Нагадаємо, що при $x \in [-1; 1]$ виконуються рівності:

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ та } \cos(\arccos x) = x.$$

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$.

Якщо $x \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$.

Приклад 5. Знайдіть $\arccos\left(\cos \frac{10}{7}\pi\right)$.



VI. Застосування формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу

Теорема. Якщо $x \in [-1; 1]$, то справедлива рівність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Доведемо, що $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, $x \in [-1; 1]$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$, то ліва і права частини рівності належать проміжку зростання функції $y = \sin x$, тому

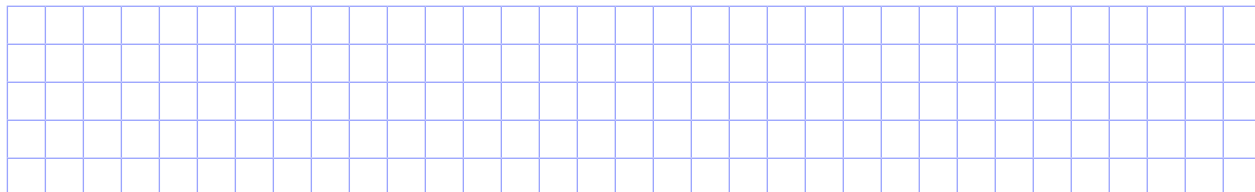
$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Тому $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Отже, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$.

Що й треба було довести.

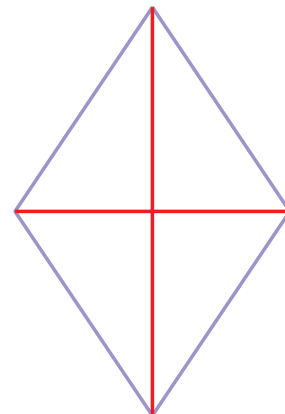
Приклад 6. Спростіть вираз $\pi - 2\arccos x$.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час прокладання тротуарних доріжок у парковій зоні, що має форму ромба, майстер планує викласти сторони ромба сірою плиткою, а діагоналі — червоною (див. рисунок). Виявилося, що на складі плитки рівно стільки скільки потрібно майстру, але відношення кількості сірої плитки до кількості червоної дорівнює m . Допоможіть майстру встановити, які кути мають бути у ромба, та у яких межах лежить число m , щоб можна було взагалі виконати цю роботу.



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \arcsin(x - 1)$; 2) $y = \arcsin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y = \arccos(x + \pi)$; 4) $y = \arccos \frac{\pi}{x + 4}$.
2. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \arcsin \frac{1 - 3x}{2}$; 2) $y = \arcsin \frac{x - 3}{2}$; 3) $y = \arccos(2x - 3)$; 4) $y = \arccos(2 - 3x)$.
3. Знайдіть множину значень функції:
1) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arccos x + \pi$; 3) $y = \arcsin x + 1$; 4) $y = \arccos x + 2$.
4. Обчисліть:
1) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$; 3) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{6}\right)$.
5. Обчисліть:
1) $\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4}$; 2) $\arcsin \frac{2}{3} + \arccos \frac{2}{3}$.
6. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{\arcsin x - 2}{5}$ та її найбільше й найменше значення.

Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \arcsin \frac{1}{2x}$; 2) $y = \arccos \frac{\pi}{x + 4}$; 3) $y = \arccos \frac{2}{3x}$; 4) $y = \arcsin \frac{\pi}{x + 5}$.
2. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \arccos \sqrt{x}$; 2) $y = \arccos \sqrt{3 - x}$; 3) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 4) $y = \arcsin \sqrt{2 - x}$.

3. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1 - \sqrt{x}}{2}$;

2) $y = \arccos(2\sqrt{x} - 3)$;

3) $y = \arccos(x^2 - x + 1)$;

4) $y = \arcsin \frac{2x^2 - 5}{3}$.

4. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \arcsin \sqrt{x} + 4$; 2) $y = \arccos \sqrt{-x} + 2$; 3) $y = \sqrt{\arcsin x}$; 4) $y = \sqrt{-\arccos x}$.

5. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{1}{\arcsin x}$; 2) $y = \frac{1}{\arccos x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$; 2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$; 3) $y = \sqrt{\arccos x}$; 4) $y = \sqrt{-\arccos x}$.

7. Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin \frac{4\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 3)$; 3) $\arccos(\cos 6,28)$; 4) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{9}\right)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\arccos \sqrt{x-1} + \arcsin \sqrt{x-1}) = 0$;

3) $x^2(\arcsin x + \arccos x) = \pi x$.

4) $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$.

9. Знайдіть множину значень функції $y = \arcsin x - \arccos x$ та її найбільше й найменше значення.

10. Знайдіть область визначення та множину значень функції:

1) $f(x) = \arcsin(2 - 2x) + \arccos(2 - 2x) + \arccos x$;

2) $f(x) = \arcsin(4x + 3) + \arccos(4x + 3) + 4 \arcsin x$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin \sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$;

2) $\arccos\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{7\pi}{6} = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1}{x} + \arccos \sqrt{x-1}$;

2) $y = \arccos \frac{1}{x+2} + \arcsin \sqrt{x+1}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos(|x| - 2) + \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

2) $y = \sqrt{2 + 3x - 5x^2} + \arccos \frac{x-2}{5}$;

3) $y = \arcsin \frac{x-1}{11} + \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$;

4) $y = \sqrt{\frac{3-x}{x-5}} + \arccos \frac{x+3}{6}$.

3. Знайдіть множину значень функції та її найбільше й найменше значення:

1) $y = 5 \arcsin x + 3 \arccos x$;

2) $y = \arcsin x \cdot \arccos x$.

4. Знайдіть область визначення та множину значень функції:
 1) $f(x) = \arcsin^2 3x + \arcsin 3x$; 2) $f(x) = \arccos^2(x-1) + 2\arcsin(x-1)$.
5. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(\cos x + (\pi - x)^2 + 2)$.
6. Доведіть, що $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка для довільного числа з проміжку $[-1; 1]$ обчислює суму арксинуса і арккосинуса цього числа і порівнює отримане значення з $\frac{\pi}{2}$.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію знаходити області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити множини значень та найбільше й найменше значення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію використовувати формули, що визначають взаємну оберненість функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як застосовувати формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- Геометричне та графічне обґрунтування формул взаємозв'язку між арксинусом і арккосинусом одного числа.
- Практичне застосування арксинуса та арккосинуса в задачах на обчислення кутів.
- Використання взаємозв'язку між арксинусом і арккосинусом при розв'язуванні рівнянь.
- Арксинус і арккосинус у сферичній геометрії.
- Порівняння алгоритмів обчислення арксинусів і арккосинусів у різних мовах програмування.







