

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 15. Урок —практикум. Розв’язування задач з використанням властивостей функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$. Формула суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу

План уроку

1. Знаходження області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$.
2. Знаходження множини значень функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$ та їхніх найбільших (найменших) значень.
3. Використання формул, що визначають взаємну оберненість функцій.
4. Застосування формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв’язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи існує зв'язок між арксинусом і арккосинусом одного й того ж числа?

2) У яких прикладних задачах зручніше використовувати арксинус, а у яких арккосинус?

3) Чи для будь-яких чисел можна порахувати їхній арксинус чи арккосинус? Від чого це залежить?

4) Що легше знайти синус від арксинуса чи косинус від арксинуса?

5) Чи може арксинус певного числа дорівнювати арккосинусу цього числа?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу $\sin\left(\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

Відповідь. $-0,5$.

2. Якого найменшого значення набуває функція $f(x) = 2 \sin 3x - 2$?

Відповідь. -4 .

3. Розв'яжіть рівняння $\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

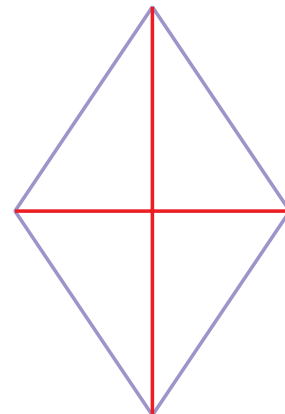
Відповідь. $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час прокладання тротуарних доріжок у парковій зоні, що має форму ромба, майстер планує викласти сторони ромба сірою плиткою, а діагоналі — червоною (див. рисунок). Виявилося, що на складі плитки рівно стільки скільки потрібно майстру, але відношення кількості сірої плитки до кількості червоної дорівнює m . Допоможіть майстру встановити, які кути мають бути у ромба, та у яких межах лежить число m , щоб можна було взагалі виконати цю роботу.



III. Знаходження області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$

При знаходженні області визначення функцій $y = \arccos f(x)$ та $y = \arcsin f(x)$ крім області визначення функції $f(x)$ потрібно враховувати також, що $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \arcsin(x - 2)$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо з умови:

$$-1 \leq x - 2 \leq 1, 1 \leq x \leq 3.$$

Відповідь. $D(f) = [1; 3]$.

7. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо з умови:

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 2, x^2 \leq 2.$$

Оскільки обидві частини нерівності додатні, то добувши квадратний корінь з обох частин, дістанемо: $|x| \leq \sqrt{2}, x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Відповідь. $D(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

8. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \arcsin(x^2 - x + 1)$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо з умови: $-1 \leq x^2 - x + 1 \leq 1$.

Подвійну нерівність замінимо рівносильною системою:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 \leq 1, & \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x^2 - x - 1 \geq -1; \end{cases} \\ x^2 - x - 1 \geq -1; & \begin{cases} x^2 - x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

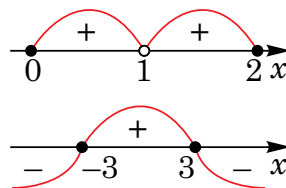
Звідки $x \in [-1; 0] \cup [1; 2]$.

Відповідь. $[-1; 0] \cup [1; 2]$.

9. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\arcsin(x-1)}$.

Розв'язання. Складемо та розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1, \\ \arcsin(x-1) \neq 0, \\ 9-x^2 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ x-1 \neq 0, \\ (3-x)(3+x) \geq 0. \end{cases}$$



$$D(y) = [0; 1) \cup (1; 2].$$

Відповідь. $D(y) = [0; 1) \cup (1; 2]$.

IV. Знаходження множини значень функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$ та їхніх найбільших (найменших) значень

Для знаходження множини значень функцій, пов'язаних із функціями $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$ корисно пам'ятати, що $0 \leq \arccos x \leq \pi$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, а також знати властивості числових нерівностей.

Ілюстративні приклади

10. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} + \pi$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \geq 0$, то $0 \leq \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Тоді } \pi \leq \arcsin \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } E(f) = \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right].$$

11. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \sqrt{-\arccos x}$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leq \arccos x \leq \pi$, то $-\arccos x \leq 0$. Тоді область значень цієї функції містить тільки значення $x = 1$.

Враховуючи, що $\arccos 1 = 0$, маємо $E(f) = \{0\}$.

Відповідь. $E(f) = \{0\}$.

12. Знайдіть множину значень функції $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \arccos 2x$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leq \arccos 2x \leq \pi$, то $-\pi \leq \arccos 2x \leq 0$.

$$\text{Маємо: } -\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} - \arccos 2x \leq -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } E(f) = \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right].$$

13. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \arcsin \sqrt{x-1} + 2$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x-1} \geq 0$, то $0 \leq \arcsin \sqrt{x-1} \leq \frac{\pi}{2}$.

Тоді $2 \leq \arcsin \sqrt{x-1} + 2 \leq \frac{\pi}{2} + 2$.

Якщо $x = 1$, то $\arcsin \sqrt{x-1} + 2 = 2$ і при $x = 2$ $\arcsin \sqrt{x-1} + 2 = \frac{\pi}{2} + 2$, то найменше значення функції дорівнює 2, а найбільше становить $\frac{\pi}{2} + 2$.

Відповідь. 2; $\frac{\pi}{2} + 2$.

V. Використання формул, що визначають взаємну оберненість функцій

Нагадаємо, що при $x \in [-1; 1]$ виконуються рівності:

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ та } \cos(\arccos x) = x.$$

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$.

Якщо $x \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$.

Ілюстративні приклади

14. Обчисліть: $\arccos\left(\cos \frac{2}{7}\pi\right)$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leq \frac{2}{7}\pi \leq \pi$, то $\arccos\left(\cos \frac{2}{7}\pi\right) = \frac{2}{7}\pi$.

Відповідь. $\frac{2}{7}\pi$.

15. Обчисліть: $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \leq -\frac{1}{5} \leq 1$, то $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -\frac{1}{5}$.

Відповідь. $-\frac{1}{5}$.

16. Обчисліть: $\arccos\left(\cos \frac{10}{7}\pi\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{10}{7}\pi \notin [0; \pi]$, то не можна безпосередньо скористатися формулою $\arccos(\cos x) = x$.

Тому $\arccos\left(\cos \frac{10}{7}\pi\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{10}{7}\pi - 2\pi\right)\right) =$

$$= \arccos\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right) = \frac{4\pi}{7}.$$

Відповідь. $\frac{4\pi}{7}$.

VI. Застосування формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу

Теорема. Якщо $x \in [-1; 1]$, то справедлива рівність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Доведемо, що $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, $x \in [-1; 1]$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$, то ліва і права частини рівності належать проміжку зростання функції $y = \sin x$, тому

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Тому $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Отже, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$.

Що й треба було довести.

Ілюстративні приклади

17. Спростіть вираз $\pi - 2\arccos x$.

$$\text{Розв'язання. } \pi - 2\arccos x = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = 2\arcsin x.$$

Відповідь. $2\arcsin x$.

18. Спростіть вираз $4\arccos x - 6\arcsin x - 2\pi$.

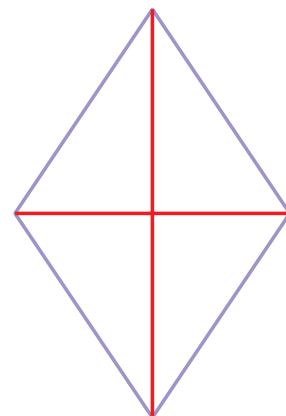
$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } 4\arccos x - 6\arcsin x - 2\pi &= 4\arccos x + 4\arcsin x - 10\arcsin x - 2\pi = \\ &= 4(\arccos x + \arcsin x) - 10\arcsin x - 2\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 10\arcsin x - 2\pi = -10\arcsin x. \end{aligned}$$

Відповідь. $-10\arcsin x$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час прокладання тротуарних доріжок у парковій зоні, що має форму ромба, майстер планує викласти сторони ромба сірою плиткою, а діагоналі — червоною (див. рисунок). Виявилося, що на складі плитки рівно стільки скільки потрібно майстру, але відношення кількості сірої плитки до кількості червоної дорівнює m . Допоможіть майстру встановити, які кути мають бути у ромба, та у яких межах лежить число m , щоб можна було взагалі виконати цю роботу.



Розв'язання. Уведемо позначення. Нехай $ABCD$ — даний ромб зі стороною a , α — половина меншого кута ромба (див. рисунок).

Із прямокутного трикутника AOB : $AO = a \sin \alpha$,
 $BO = a \cos \alpha$.

Сума довжин діагоналей ромба становить $2a(\sin \alpha + \cos \alpha)$, а периметр дорівнює $4a$.

За умовою, відношення периметра ромба до суми його діагоналей дорівнює m , тобто $\frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = m$, звідки

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{m}.$$

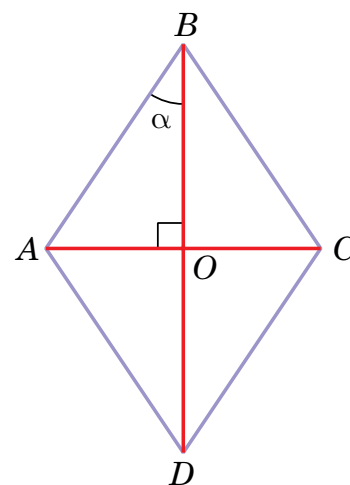
$$\text{Тоді } \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \frac{2}{m}, \quad \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{m}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\sqrt{2}}{m}.$$

Рівняння буде мати розв'язок при умові $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} \leq 1$, тобто $m \geq \sqrt{2}$.

Щоб трикутник AOB існував необхідно, щоб половина суми діагоналей ромба була більшою за четверту частину від периметра, звідки отримуємо, що $m < 2$.

Оскільки α — гострий кут, то $\frac{\pi}{4} + \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m}$, тобто кути ромба дорівнюють $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m} - \frac{\pi}{2}$ і $-2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{3\pi}{2}$.

Відповідь. $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m} - \frac{\pi}{2}$; $-2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{3\pi}{2}$; $\sqrt{2} \leq m < 2$



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(x-1)$; 2) $y = \arcsin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y = \arccos(x + \pi)$; 4) $y = \arccos \frac{\pi}{x+4}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1-3x}{2}$; 2) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$; 3) $y = \arccos(2x-3)$; 4) $y = \arccos(2-3x)$.

3. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arccos x + \pi$; 3) $y = \arcsin x + 1$; 4) $y = \arccos x + 2$.

4. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$; 3) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{6}\right)$.

5. Обчисліть:

1) $\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4}$; 2) $\arcsin \frac{2}{3} + \arccos \frac{2}{3}$.

6. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{\arcsin x - 2}{5}$ та її найбільше й найменше значення.

Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1}{2x}$; 2) $y = \arccos \frac{\pi}{x+4}$; 3) $y = \arccos \frac{2}{3x}$; 4) $y = \arcsin \frac{\pi}{x+5}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos \sqrt{x}$; 2) $y = \arccos \sqrt{3-x}$; 3) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 4) $y = \arcsin \sqrt{2-x}$.

3. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1-\sqrt{x}}{2}$; 2) $y = \arccos(2\sqrt{x}-3)$;
3) $y = \arccos(x^2-x+1)$; 4) $y = \arcsin \frac{2x^2-5}{3}$.

4. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \arcsin \sqrt{x} + 4$; 2) $y = \arccos \sqrt{-x} + 2$; 3) $y = \sqrt{\arcsin x}$; 4) $y = \sqrt{-\arccos x}$.

5. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{1}{\arcsin x}$; 2) $y = \frac{1}{\arccos x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$; 2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$; 3) $y = \sqrt{\arccos x}$; 4) $y = \sqrt{-\arccos x}$.

7. Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin \frac{4\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 3)$; 3) $\arccos(\cos 6,28)$; 4) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{9}\right)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\arccos \sqrt{x-1} + \arcsin \sqrt{x-1}) = 0$;

3) $x^2(\arcsin x + \arccos x) = \pi x$.

4) $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$.

9. Знайдіть множину значень функції $y = \arcsin x - \arccos x$ та її найбільше й найменше значення.

10. Знайдіть область визначення та множину значень функції:

1) $f(x) = \arcsin(2-2x) + \arccos(2-2x) + \arccos x$;

2) $f(x) = \arcsin(4x+3) + \arccos(4x+3) + 4\arcsin x$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin \sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$;

2) $\arccos\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{7\pi}{6} = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin \frac{1}{x} + \arccos \sqrt{x-1}$;

2) $y = \arccos \frac{1}{x+2} + \arcsin \sqrt{x+1}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos(|x|-2) + \frac{1}{x^2-x-2}$;

2) $y = \sqrt{2+3x-5x^2} + \arccos \frac{x-2}{5}$;

3) $y = \arcsin \frac{x-1}{11} + \sqrt{3x^2+2x-1}$;

4) $y = \sqrt{\frac{3-x}{x-5}} + \arccos \frac{x+3}{6}$.

3. Знайдіть множину значень функції та її найбільше й найменше значення:

1) $y = 5\arcsin x + 3\arccos x$;

2) $y = \arcsin x \cdot \arccos x$.

4. Знайдіть область визначення та множину значень функції:

1) $f(x) = \arcsin^2 3x + \arcsin 3x$;

2) $f(x) = \arccos^2(x-1) + 2\arcsin(x-1)$.

5. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(\cos x + (\pi-x)^2 + 2)$.

6. Доведіть, що $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка для довільного числа з проміжку $[-1; 1]$ обчислює суму арксинуса і арккосинуса цього числа і порівнює отримане значення з $\frac{\pi}{2}$.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я вмію знаходити області визначення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 2.** Я вмію знаходити множини значень та найбільше й найменше значення функцій $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 3.** Я вмію використовувати формули, що визначають взаємну оберненість функцій.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я знаю, як застосовувати формули суми арксинуса та арккосинуса одного аргументу.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

1. Геометричне та графічне обґрунтування формул взаємозв'язку між арксинусом і арккосинусом одного числа.
2. Практичне застосування арксинуса та арккосинуса в задачах на обчислення кутів.
3. Використання взаємозв'язку між арксинусом і арккосинусом при розв'язуванні рівнянь.
4. Арксинус і арккосинус у сферичній геометрії.
5. Порівняння алгоритмів обчислення арксинусів і арккосинусів у різних мовах програмування.