

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 16. Урок–практикум. Побудова графіків обернених тригонометричних функцій. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

1) будувати графіки функцій виду $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \cos(\arccos x)$ тощо;

2) розв'язувати найпростіші рівняння, що містять обернені тригонометричні функції $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$;

3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(2x - 5)$.
3. Укажіть множину значень функції $y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos x$.
4. Обчисліть: $\arcsin 0,3 + \arccos 0,3$.
5. Відомо, що $\arccos x = \frac{\pi}{5}$. Знайдіть $\arccos(-x)$.

III. Побудова графіків функцій виду $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \cos(\arccos x)$ тощо

Нагадаємо, що при $x \in [-1; 1]$ виконуються рівності:

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ та } \cos(\arccos x) = x.$$

Якщо ж $x \notin [-1; 1]$, то вирази $\sin(\arcsin x)$ та $\cos(\arccos x)$ невизначені.

Вирази $\arcsin(\sin x)$ та $\arccos(\cos x)$ визначені для будь якого дійсного значення x .

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $x \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$.

Для усіх інших значень x використовують періодичність функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ і формули зведення. Також можна запам'ятати більш загальні формули для обчислення значень виразів $\arcsin(\sin x)$ та $\arccos(\cos x)$.

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}, \\ -x + \pi + 2\pi k, x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

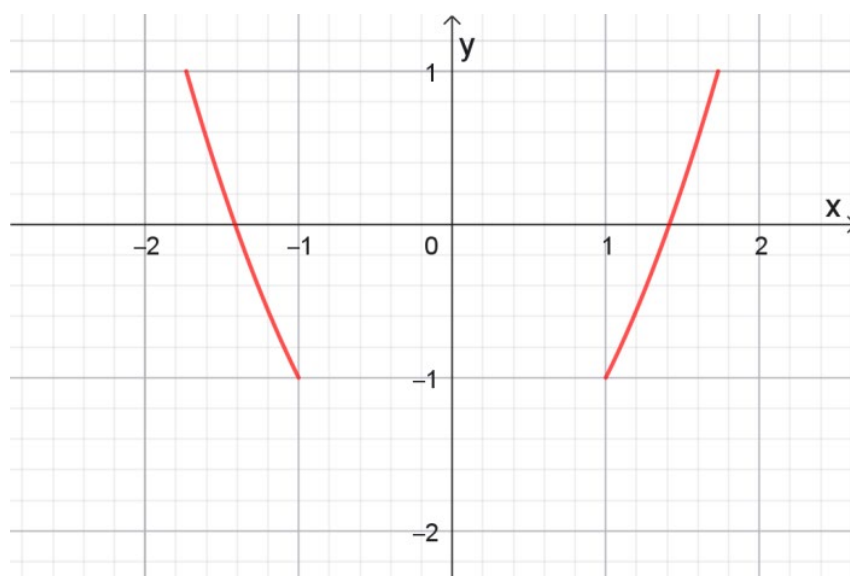
$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi k, x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}, \\ -x + 2\pi k, x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Приклад 1. Побудуйте графік функції $f(x) = \sin(\arcsin(x^2 - 2))$.

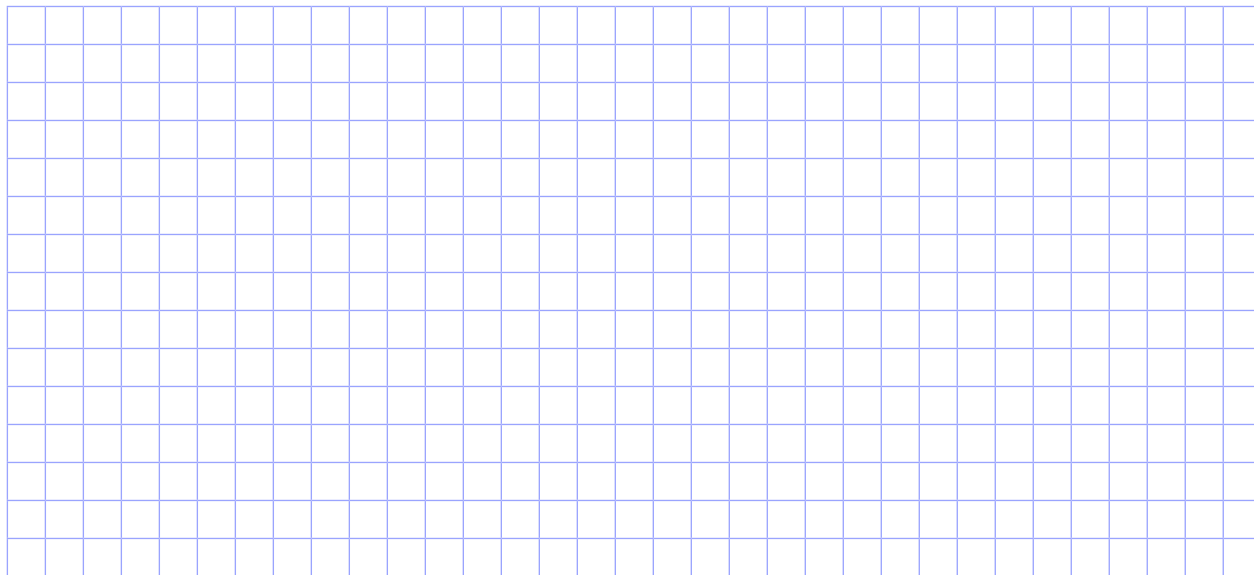
Розв'язання. $\sin(\arcsin(x^2 - 2)) = x^2 - 2$, якщо $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$ або $1 \leq x^2 \leq 3$.

Тоді $x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$.

Побудуємо графік функції $y = x^2 - 2$ при $x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$ (див. рисунок).



Приклад 2. Побудуйте графік функції $f(x) = \cos(\arccos(\sqrt{x}))$.



IV. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями

Розглянемо найпростіші рівняння, які містять функції арксинуса і арккосинуса.

1) Рівняння $\arcsin x = a$ рівносильне рівнянню $x = \sin a$, якщо $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при інших значеннях a рівняння коренів не має.

2) Рівняння $\arccos x = a$ рівносильне рівнянню $x = \cos a$, якщо $a \in [0; \pi]$, при інших значеннях a рівняння коренів не має.

3) Кожне з рівнянь $\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$ і $\arccos f(x) = \arccos g(x)$ рівносильне одній із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1. \end{cases}$

4) Деякі рівняння, що містять аркфункції, зводяться до алгебричних заміною змінних. Потрібно лише враховувати обмеження на нову змінну, зважаючи на обмеженість обернених тригонометричних функцій.

5) Розв'язування деяких рівнянь, що містять аркфункції, ґрунтується виключно на таких властивостях цих функцій, як обмеженість і монотонність.

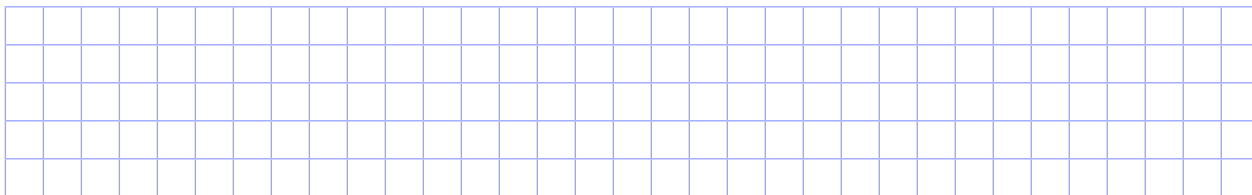
Важливі також теореми 1 – 3.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна, то рівняння $f(x) = a$, де $a = \text{const}$, має не більше одного кореня.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ монотонно спадає, а функція $y = g(x)$ монотонно зростає, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.

Теорема 3. Якщо $\min_x f(x) = a = \max_x g(x)$, де $a = \text{const}$, то на множині X рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $6 \arcsin(x - 4) = \pi$.



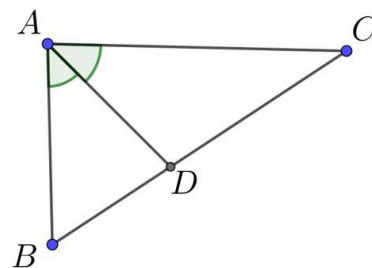
Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(27x^2 + 12x - 1) = \arcsin(1 - 3x)$.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. З точки A запускають три тестових дрони, кожен з яких летить по прямій на однаковій висоті. Дальність польоту першого дрона становить 20 км і відповідає траєкторії AB , дальність польоту другого дрона дорівнює 30 км і відповідає траєкторії AC (див. рисунок). Третій, контролюючий дрон, летить по траєкторії, кожна точка якої рівновіддалена від променів, що містять траєкторії першого і другого дронів та зупиняється в точці D , такій, що точки A , C і D лежать на одній прямій. Установіть функціональну залежність між кутом BAC та дальністю польоту x третього дрона (x км). Знайдіть область визначення знайденої функції та побудуйте її графік.



Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|)$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(2 - 3x) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin \frac{x-2}{4} = -\frac{\pi}{4}$; 3) $\arcsin(3 - 2x) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin \frac{x+3}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(2x + 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$; 3) $\arccos(3x + 1) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2x-1}{3} = \pi$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin |x - 1|$; 2) $y = \arccos |2x + 1|$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = -\arcsin(x + 2) - \frac{\pi}{3}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x = \pi^2$;

2) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$;

3) $\arccos(2x-3) = \frac{\pi}{2}$;

4) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$;

5) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$;

6) $\arccos x = \frac{1}{2}$;

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x^2 = \arcsin(7x+8)$;

2) $\arccos(x^2-x) = \arccos(3x^2-8x+3)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos \frac{x^2-6}{2x+6} = \pi$;

2) $\arcsin \frac{5-x^2}{2x-3} = \frac{\pi}{2}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0$;

2) $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x - 12 = 0$;

3) $\arcsin^2 x - 2\arcsin x - 3 = 0$;

4) $\arccos^2 x - 8\arccos x + 12 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(4x^2-x) - \arcsin(4x^2-x) = \frac{\pi}{6}$;

2) $2\arcsin(x^2-x+0,5) = \arccos(x^2-x+0,5)$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\arccos(4x-9)) = x^2-5x+5$;

2) $\sin(\arcsin(x+2)) = x+2$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(3x+2) = \arccos(5x+3)$;

2) $\arcsin(x^2-4) = \arcsin(2x+4)$.

7. Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin 2x$;

2) $y = \arcsin \frac{x}{3}$;

3) $y = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$;

4) $y = \arcsin 2(x-1) + \frac{\pi}{2}$.

9. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}, & x < -1; \\ \arcsin x, & -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}, & x > 1. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \arcsin x, & -1 \leq x \leq 0; \\ -\arcsin x, & 0 < x \leq 1; \\ (x-1)^2 - \frac{\pi}{2}, & 1 < x \leq 3. \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \pi, & x < -1; \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} \arccos x, & -1 \leq x \leq 0,5; \\ \frac{\pi}{3}, & 0,5 < x \leq \frac{\pi}{3}; \\ x, & \frac{\pi}{3} < x \leq 3. \end{cases}$

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \sqrt{x-1}$;

2) $\arccos x = -(x-1)^2$;

3) $\arccos x = \pi + (x+1)^4$;

4) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + x^2$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$;

2) $\cos(\arccos(x+1)) = 2x$;

3) $\cos(\arccos(x-1)) = \frac{1}{4}$;

4) $\sin(\arcsin(x+2)) = x+2$;

5) $\cos(\arccos(x-1)) = x-1$;

6) $\sin(\arcsin x) = x+1$.

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)$;

2) $y = \cos(\arccos(2x-1))$;

3) $y = \cos(\arccos(1-3x))$;

$y = \sin\left(\arcsin \frac{1}{x^2}\right)$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cos x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \sin x\right) = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin(1+2\cos x) + \arccos(1+3\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x \sqrt{3} + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos x = \arcsin 2x$;

3) $\arccos(x-1) + \arcsin x = \pi$;

4) $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

3. Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\arccos x = \arcsin \frac{7x}{3}$;

2) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3|\arcsin x| - \arcsin x$;

2) $y = \arcsin x + |\arcsin x|$;

3) $y = \left|\arcsin x - \frac{\pi}{3}\right|$;

4) $y = -\arcsin|x-2|$;

5) $y = \left|\arccos x - \frac{2\pi}{3}\right|$;

6) $y = -2\arccos|x|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(\sin(2x))$;

2) $y = \arccos\left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

7. Творче завдання. Розробіть програмний інструмент для графічного розв'язування рівнянь, що містять арксинуси і арккосинуси.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Дослідження впливу параметрів на графіки обернених тригонометричних функцій.
2. Чисельні методи розв'язування рівнянь, які містять обернені тригонометричні функції.
3. Рівняння, що містять арккосинуси і арксинуси в геометрії.
4. Обернені тригонометричні функції як моделі кутових обмежень у фізиці і в техніці.
5. Оцінка кутів у робототехніці за допомогою арксинуса чи арккосинуса.







