

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 16. Урок–практикум. Побудова графіків обернених тригонометричних функцій. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Побудова графіків функцій виду $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \cos(\arccos x)$ тощо.
2. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Для чого будувати графіки функцій з оберненими тригонометричними функціями? Що вони ілюструють?

2) Чому обернені тригонометричні функції є незамінними у навігації, робототехніці чи 3D-графіці?

3) За допомогою яких функцій можна визначити кут повороту відеокамери, якщо відомі лише координати точки, на яку ця відеокамера направлена?

4) Чи допомагає уміння знаходити область визначення функції та множини її значень при розв'язуванні рівнянь, які містять арксинус чи арккосинус?

5) Як ви думаєте, що означає префікс «арк» у назвах обернених тригонометричних функцій?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Відповідь. $-\frac{7\pi}{12}$.

2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(2x - 5)$.

Відповідь. $[2; 3]$.

3. Укажіть множину значень функції $y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos x$.

Відповідь. $\left[-\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Обчисліть: $\arcsin 0,3 + \arccos 0,3$.

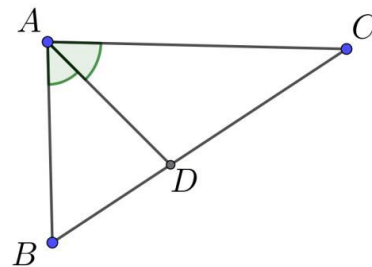
Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

5. Відомо, що $\arccos x = \frac{\pi}{5}$. Знайдіть $\arccos(-x)$.

Відповідь. $\frac{4\pi}{5}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. З точки A запускають три тестових дрони, кожен з яких летить по прямій на однаковій висоті. Дальність польоту першого дрона становить 20 км і відповідає траєкторії AB , дальність польоту другого дрона дорівнює 30 км і відповідає траєкторії AC (див. рисунок). Третій, контролюючий дрон, летить по траєкторії кожна точка якої рівновіддалена від променів, що містять траєкторії першого і другого дронів та зупиняється в точці D , такий, що точки A, C і D лежать на одній прямій. Установіть функціональну залежність між кутом BAC та дальністю польоту x третього дрона (y км). Знайдіть область визначення знайденої функції та побудуйте її графік.



Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|)$.

III. Побудова графіків функцій виду $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \cos(\arccos x)$ тощо

Нагадаємо, що при $x \in [-1; 1]$ виконуються рівності:

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ та } \cos(\arccos x) = x.$$

Якщо ж $x \notin [-1; 1]$, то вирази $\sin(\arcsin x)$ та $\cos(\arccos x)$ невизначені.

Вирази $\arcsin(\sin x)$ та $\arccos(\cos x)$ визначені для будь якого дійсного значення x .

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $x \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$.

Для усіх інших значень x використовують періодичність функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ і формули зведення. Також можна запам'ятати більш загальні формули для обчислення значень виразів $\arcsin(\sin x)$ та $\arccos(\cos x)$.

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}, \\ -x + \pi + 2\pi k, & x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}, \\ -x + 2\pi k, & x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

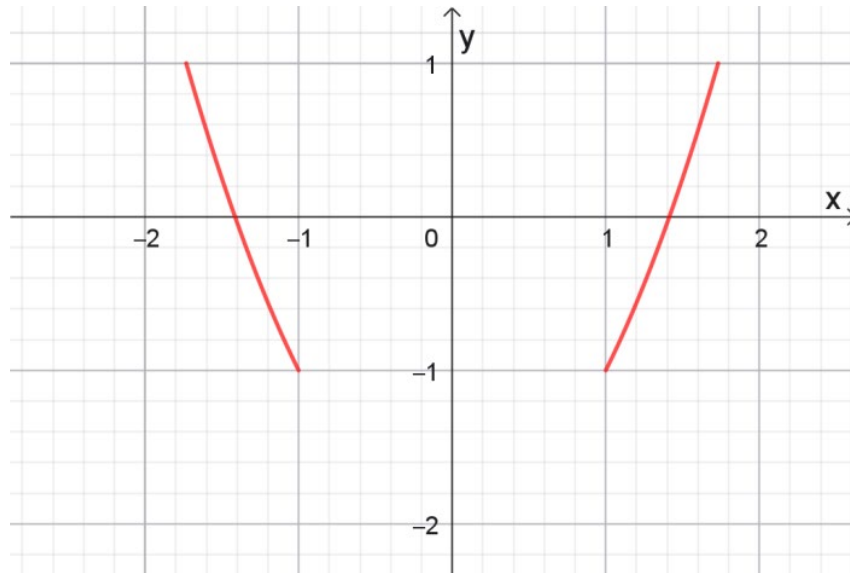
Ілюстративні приклади

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \sin(\arcsin(x^2 - 2))$.

Розв'язання. $\sin(\arcsin(x^2 - 2)) = x^2 - 2$, якщо $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$ або $1 \leq x^2 \leq 3$.

Тоді $x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$.

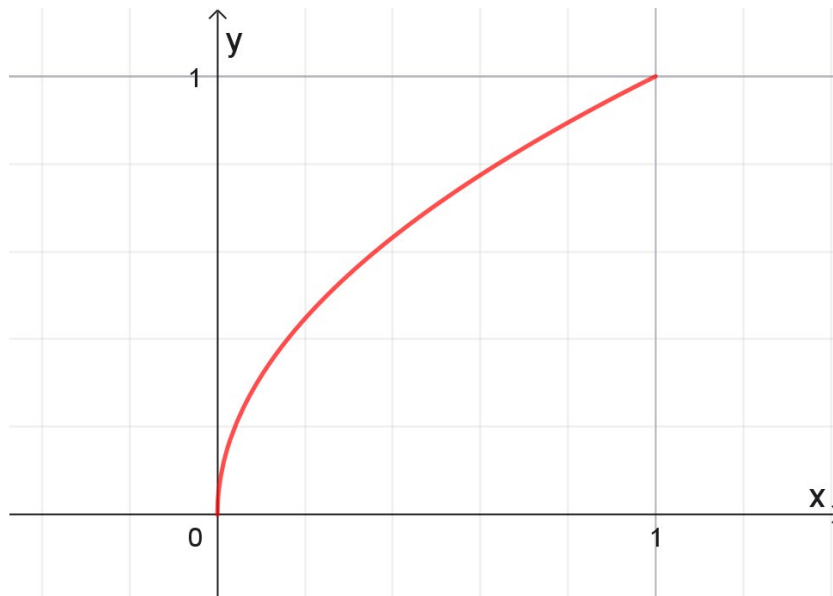
Побудуємо графік функції $y = x^2 - 2$ при $x \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$ (див. рисунок).



7. Побудуйте графік функції $f(x) = \cos(\arccos(\sqrt{x}))$.

Розв'язання. $\cos(\arccos(\sqrt{x})) = \sqrt{x}$, якщо $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$ або $0 \leq x \leq 1, x \in [0; 1]$.

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$ при $x \in [0; 1]$ (див. рисунок).



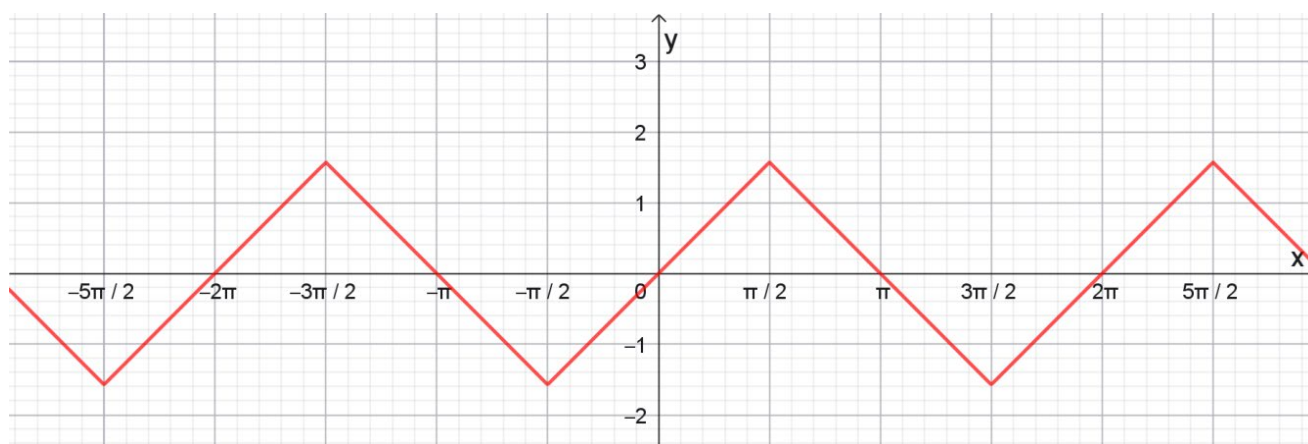
8. Побудуйте графік функції $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Розв'язання. Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$. Тому достатньо побудувати її графік на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ довжиною в період.

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$. Тому на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$, отже, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

Тому на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = \pi - x$ (див. рисунок).



IV. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями

Розглянемо найпростіші рівняння, які містять функції арксинуса і арккосинуса.

1) Рівняння $\arcsin x = a$ рівносильне рівнянню $x = \sin a$, якщо $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при інших значеннях a рівняння коренів не має.

2) Рівняння $\arccos x = a$ рівносильне рівнянню $x = \cos a$, якщо $a \in [0; \pi]$, при інших значеннях a рівняння коренів не має.

3) Кожне з рівнянь $\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$ і $\arccos f(x) = \arccos g(x)$ рівносильне одній із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1. \end{cases}$

4) Деякі рівняння, що містять аркфункції, зводяться до алгебричних заміною змінних. Потрібно лише враховувати обмеження на нову змінну, зважаючи на обмеженість обернених тригонометричних функцій.

5) Розв'язування деяких рівнянь, що містять аркфункції, ґрунтується виключно на таких властивостях цих функцій, як обмеженість і монотонність.

Важливі також теореми 1 – 3.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна, то рівняння $f(x) = a$, де $a = \text{const}$, має не більше одного кореня.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ монотонно спадає, а функція $y = g(x)$ монотонно зростає, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.

Теорема 3. Якщо $\min_X f(x) = a = \max_X g(x)$, де $a = \text{const}$, то на множині X рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$

Ілюстративні приклади

- 9.** Розв'яжіть рівняння $6 \arcsin(x - 4) = \pi$.

Розв'язання. $\arcsin(x - 4) = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $x - 4 = \sin \frac{\pi}{6}$, $x - 4 = 0,5$, $x = 4,5$.

Відповідь. 4,5.

- 10.** Розв'яжіть рівняння $\arcsin(27x^2 + 12x - 1) = \arcsin(1 - 3x)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 27x^2 + 12x - 1 = 1 - 3x, \\ |1 - 3x| \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 27x^2 + 15x - 2 = 0, \\ 0 < 3x \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{6}, \\ x = \frac{1}{9}, \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Звідси $x = \frac{1}{9}$.

Відповідь. $\frac{1}{9}$.

Зауваження. Розв'язувати нерівність, що входить до системи, необов'язково. Достатньо перевірити, чи задовольняють її знайдені корені рівняння.

- 11.** Розв'яжіть рівняння $12 \arccos^2 x + \pi^2 = 8\pi \arccos x$.

Розв'язання. Нехай $\arccos x = t$, $t \in [0; \pi]$, тоді $12t^2 - 8\pi t + \pi^2 = 0$, звідки $t_1 = \frac{\pi}{2}$,

$t_2 = \frac{\pi}{6}$. Обидва корені задовольняють умову $t \in [0; \pi]$.

1) $\arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$, $x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. 0; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Розв'яжіть рівняння $\arccos x = 2 \arcsin x$.

Розв'язання. Функція $y = 2 \arcsin x$ монотонно зростаюча, а функція $y = \arccos x$ — монотонно спадна. Очевидно, що число $x = \frac{1}{2}$ є коренем даного рівняння. За теоремою 2, цей корінь єдиний.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

13. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(x+1) + \arcsin(y-1) = \pi$.

Розв'язання. Оскільки для $|t| \leq 1$, то $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$. Тобто ліва частина даного рівняння не перевищує значення $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Рівність можлива лише тоді, коли кожний із доданків дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Отже, рівняння рівносильне системі:

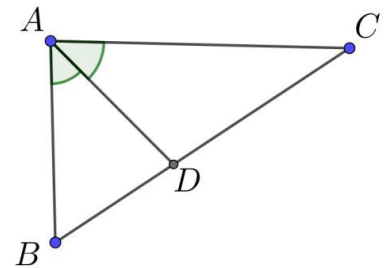
$$\begin{cases} \arcsin(x+1) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin(y-1) = \frac{\pi}{2}; \end{cases} \begin{cases} x+1=1, \\ y-1=1; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$$

Відповідь. (0; 2).

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. З точки A запускають три тестових дрони, кожен з яких летить по прямій на однаковій висоті. Дальність польоту першого дрона становить 20 км і відповідає траєкторії AB , дальність польоту другого дрона дорівнює 30 км і відповідає траєкторії AC (див. рисунок). Третій, контролюючий дрон, летить по траєкторії кожна точка якої рівновіддалена від променів, що містять траєкторії першого і другого дронів та зупиняється в точці D , такій, що точки A, C і D лежать на одній прямій. Установіть функціональну залежність між кутом BAC та дальністю польоту x третього дрона (y км). Знайдіть область визначення знайденої функції та побудуйте її графік.



Установіть функціональну залежність між кутом BAC та дальністю польоту x третього дрона (y км). Знайдіть область визначення знайденої функції та побудуйте її графік.

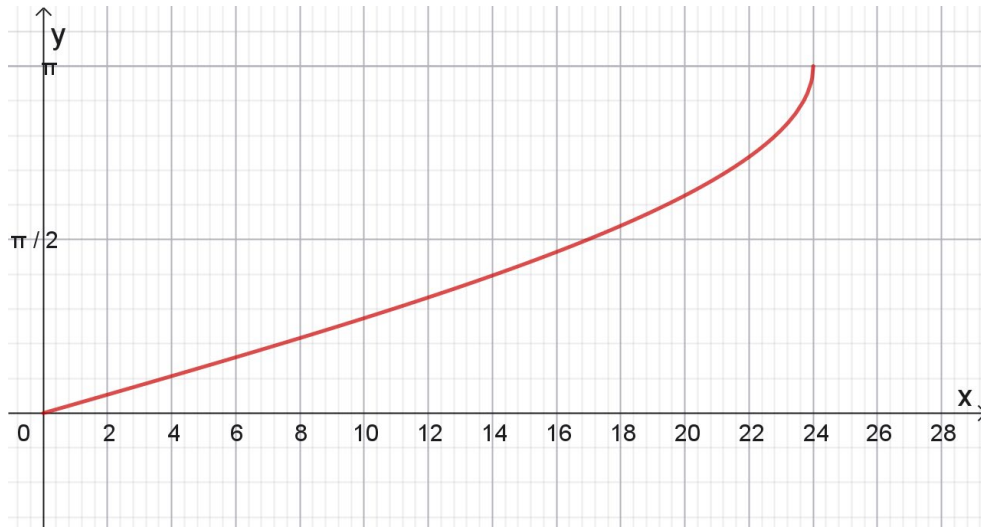
Розв'язання. Нехай $AB = a$, $AC = b$, $\angle BAD = \alpha$. Оскільки кожна точка траєкторії третього дрона рівновіддалена від променів AB та AC , то AD бісектриса кута BAC , тобто $\angle CAD = \alpha$.

Оскільки $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle CAD}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin 2\alpha$, $S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$,

$S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2}bx \sin \alpha$, то $\frac{1}{2}ab \sin 2\alpha = \frac{1}{2}ax \sin \alpha + \frac{1}{2}bx \sin \alpha$, $2ab \sin \alpha \cos \alpha = x \sin \alpha (a + b)$,

$\cos \alpha = \frac{a+b}{2ab} x$, $\cos \alpha = \frac{x}{24}$, $\alpha = \arccos \frac{x}{24}$.

Отже, залежність кута BAC від довжини траєкторії третього дрона виражається функцією $f(x) = 2 \arcsin \frac{x}{24}$, $0 < \frac{x}{24} \leq 1$. Зрозуміло, що $0 < x \leq 24$. Побудуємо графік цієї залежності (див. рисунок).



Відповідь. $f(x) = 2 \arcsin \frac{x}{24}$, $0 < x \leq 24$.

Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|)$.

Доведення. Розглянемо функції $f(x) = \arcsin(|\sin x|)$, $g(x) = \arccos(|\cos x|)$.

Обидві функції є парними, оскільки

$$f(-x) = \arcsin(|\sin(-x)|) = \arcsin(|-\sin x|) = \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$

$$g(-x) = \arccos(|\cos(-x)|) = \arccos(|\cos x|) = g(x) \text{ і періодичними з періодом } T = \pi,$$

$$\text{оскільки } f(x + \pi) = \arcsin(|-\sin x|) = \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$

$$g(x + \pi) = \arccos(|-\cos x|) = \arccos(|\cos x|) = g(x).$$

Тому достатньо довести дану рівність на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то формули, що задають функції $f(x)$ і $g(x)$, можна спростити.

Насамперед, на цьому відрізку як $\sin x$, так і $\cos x$ є невід'ємними, тому $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = \cos x$.

Крім того, цей відрізок є підмножиною відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на якому виконується рівність $\arcsin(\sin x) = x$, і підмножиною відрізка $[0; \pi]$, на якому виконується рівність $\arccos(\cos x) = x$.

Тому $f(x) = \arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin x) = x$,

$g(x) = \arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos x) = x$, що й треба було довести.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(2-3x) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin \frac{x-2}{4} = -\frac{\pi}{4}$; 3) $\arcsin(3-2x) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin \frac{x+3}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(2x+3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$; 3) $\arccos(3x+1) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2x-1}{3} = \pi$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin |x-1|$; 2) $y = \arccos |2x+1|$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = -\arcsin(x+2) - \frac{\pi}{3}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x = \pi^2$; 2) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x-3) = \frac{\pi}{2}$;
4) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$; 5) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$; 6) $\arccos x = \frac{1}{2}$;

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x^2 = \arcsin(7x+8)$; 2) $\arccos(x^2-x) = \arccos(3x^2-8x+3)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos \frac{x^2-6}{2x+6} = \pi$; 2) $\arcsin \frac{5-x^2}{2x-3} = \frac{\pi}{2}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0$; 2) $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x - 12 = 0$;
3) $\arcsin^2 x - 2\arcsin x - 3 = 0$; 4) $\arccos^2 x - 8\arccos x + 12 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(4x^2-x) - \arcsin(4x^2-x) = \frac{\pi}{6}$;
2) $2\arcsin(x^2-x+0,5) = \arccos(x^2-x+0,5)$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\arccos(4x-9)) = x^2-5x+5$; 2) $\sin(\arcsin(x+2)) = x+2$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(3x+2) = \arccos(5x+3)$; 2) $\arcsin(x^2-4) = \arcsin(2x+4)$.

7. Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin 2x$;

2) $y = \arcsin \frac{x}{3}$;

3) $y = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$;

4) $y = \arcsin 2(x-1) + \frac{\pi}{2}$.

9. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}, x < -1; \\ \arcsin x, -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}, x > 1. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \arcsin x, -1 \leq x \leq 0; \\ -\arcsin x, 0 < x \leq 1; \\ (x-1)^2 - \frac{\pi}{2}, 1 < x \leq 3. \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \pi, x < -1; \\ \arccos x, -1 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x-1}, x > 1. \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} \arccos x, -1 \leq x \leq 0,5; \\ \frac{\pi}{3}, 0,5 < x \leq \frac{\pi}{3}; \\ x, \frac{\pi}{3} < x \leq 3. \end{cases}$

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \sqrt{x-1}$;

2) $\arccos x = -(x-1)^2$;

3) $\arccos x = \pi + (x+1)^4$;

4) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + x^2$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$;

2) $\cos(\arccos(x+1)) = 2x$;

3) $\cos(\arccos(x-1)) = \frac{1}{4}$;

4) $\sin(\arcsin(x+2)) = x+2$;

5) $\cos(\arccos(x-1)) = x-1$;

6) $\sin(\arcsin x) = x+1$.

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)$;

2) $y = \cos(\arccos(2x-1))$;

3) $y = \cos(\arccos(1-3x))$;

$y = \sin\left(\arcsin \frac{1}{x^2}\right)$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cos x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \sin x\right) = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin(1+2\cos x) + \arccos(1+3\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x \sqrt{3} + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos x = \arcsin 2x$;

3) $\arccos(x-1) + \arcsin x = \pi$;

4) $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

3. Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.
4. Розв'яжіть рівняння:
 - 1) $2 \arccos x = \arcsin \frac{7x}{3}$;
 - 2) $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$.
5. Побудуйте графік функції:
 - 1) $y = 3 |\arcsin x| - \arcsin x$;
 - 2) $y = \arcsin x + |\arcsin x|$;
 - 3) $y = \left| \arcsin x - \frac{\pi}{3} \right|$;
 - 4) $y = -\arcsin |x - 2|$;
 - 5) $y = \left| \arccos x - \frac{2\pi}{3} \right|$;
 - 6) $y = -2 \arccos |x|$.
6. Побудуйте графік функції:
 - 1) $y = \arcsin(\sin(2x))$;
 - 2) $y = \arccos\left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$.
7. **Творче завдання.** Розробіть програмний інструмент для графічного розв'язування рівнянь, що містять арксинуси і арккосинуси.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

- (+) що було зрозумілим:
-
-
- (-) що залишилося незрозумілим:
-
-
- (?) що здивувало або зацікавило:
-
-

Можливі теми проєктів

1. Дослідження впливу параметрів на графіки обернених тригонометричних функцій.
2. Чисельні методи розв'язування рівнянь, які містять обернені тригонометричні функції.
3. Рівняння, що містять арккосинуси і арксинуси в геометрії.
4. Обернені тригонометричні функції як моделі кутових обмежень у фізиці і в техніці.
5. Оцінка кутів у робототехніці за допомогою арксинуса чи арккосинуса.