

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 17. Функції $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) формулювати означення функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$;
- 2) будувати графіки функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$;
- 3) основним властивостям функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$;
- 4) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arcctg}(-1)$.
2. Розташуйте в порядку зростання: $\arccos 0,9$, $\arccos(-0,6)$, $\arccos \frac{\pi}{5}$.
3. Відомо, що $\arcsin x = \frac{\pi}{10}$. Знайдіть $\arcsin x$.
4. Визначте знак числа a , якщо $a = \arcsin 0,3 - \arcsin 0,2$.
5. Укажіть множину значень функції $y = 2 \arccos x$.

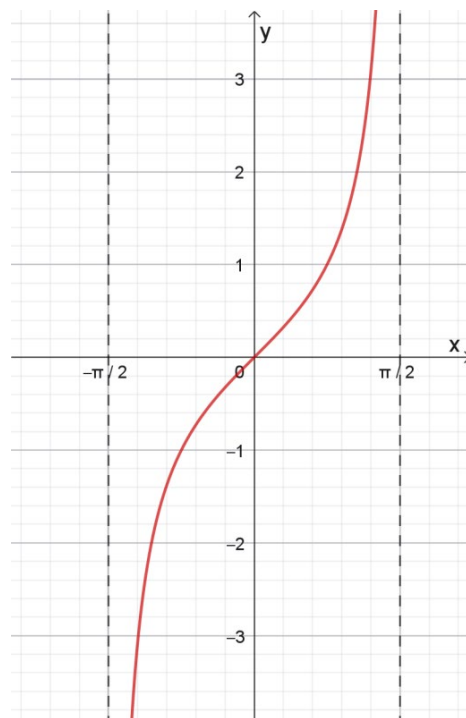
III. Означення функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (див. рисунок).

Оскільки рівняння $\operatorname{tg} x = y$, для будь-якого y має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \operatorname{arctg} y$.

Тепер розглянемо функцію $y = \operatorname{arctg} x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \operatorname{arctg} y$ або до функції $y = \operatorname{tg} x$, область визначення якої є множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Доведення. Область визначення функції $y = \operatorname{arctg} x$ збігається з областю значень функції $x = \operatorname{arctg} y$, а область значень функції $y = \operatorname{arctg} x$ збігається з областю визначення функції $x = \operatorname{arctg} y$. Причому, за цих умов $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, тому функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{arctg} y$.

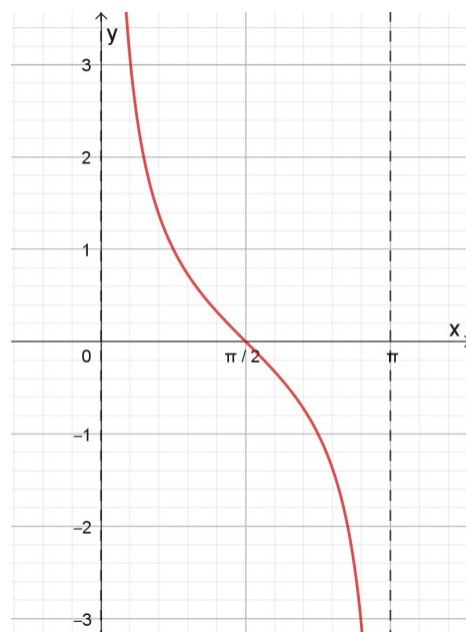


Означення. Функцію, обернену до функції $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, називають арктангенсом і позначають $y = \operatorname{arctg} x$.

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ (див. рисунок).

Оскільки рівняння $\operatorname{ctg} x = y$, для будь-якого y має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \operatorname{arcctg} y$. Тепер розглянемо функцію $y = \operatorname{arcctg} x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \operatorname{arcctg} y$ або до функції $y = \operatorname{ctg} x$, область визначення якої є множина $(0; \pi)$.

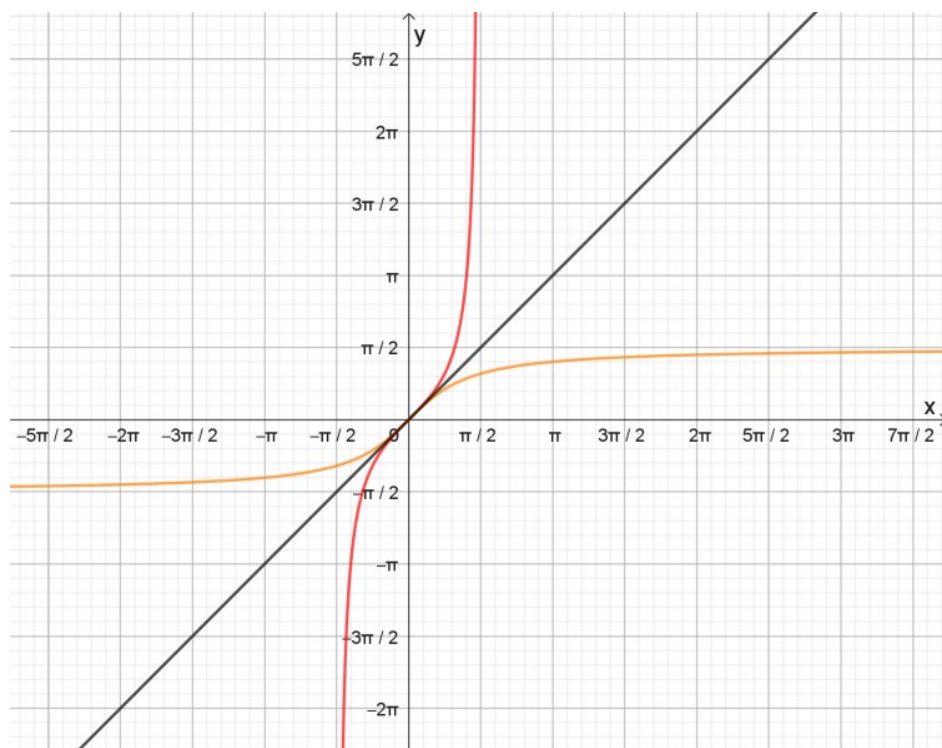
Доведення. Область визначення функції $y = \operatorname{arcctg} x$ збігається з областю значень функції $x = \operatorname{arcctg} y$, а також область значень функції $y = \operatorname{arcctg} x$ збігається з областю визначення функції $x = \operatorname{arcctg} y$. Причому, за цих умов $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$. Тому функція $y = \operatorname{arcctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{arcctg} y$.



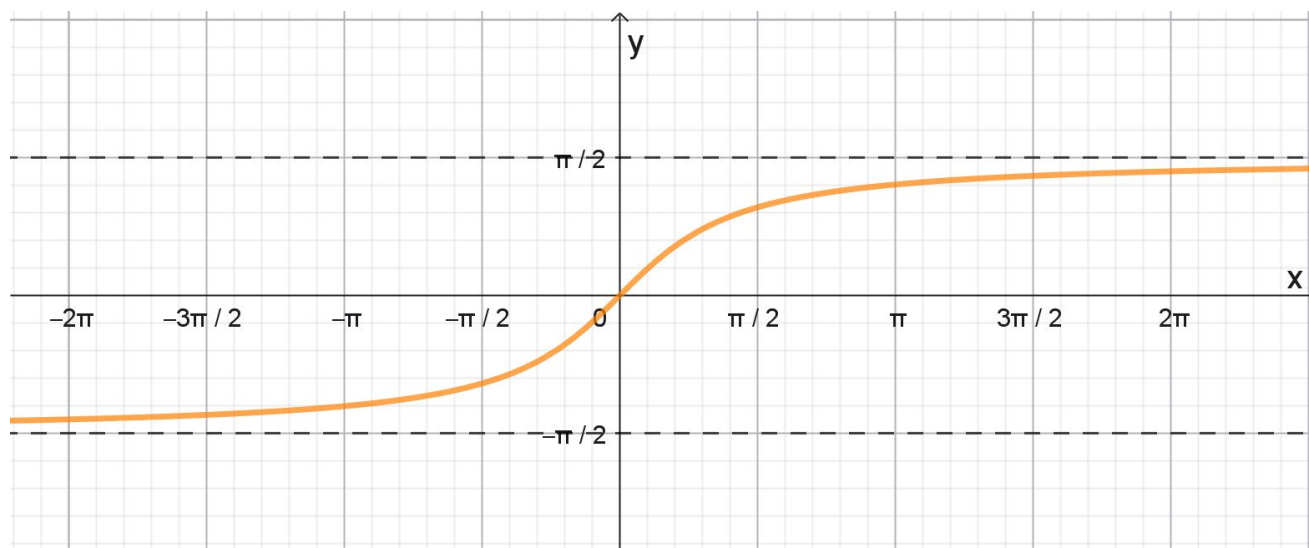
Означення. Функцію, обернену до функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, називають арккотангенсом і позначають $y = \operatorname{arcctg} x$.

IV. Побудова графіків функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcsctg} x$

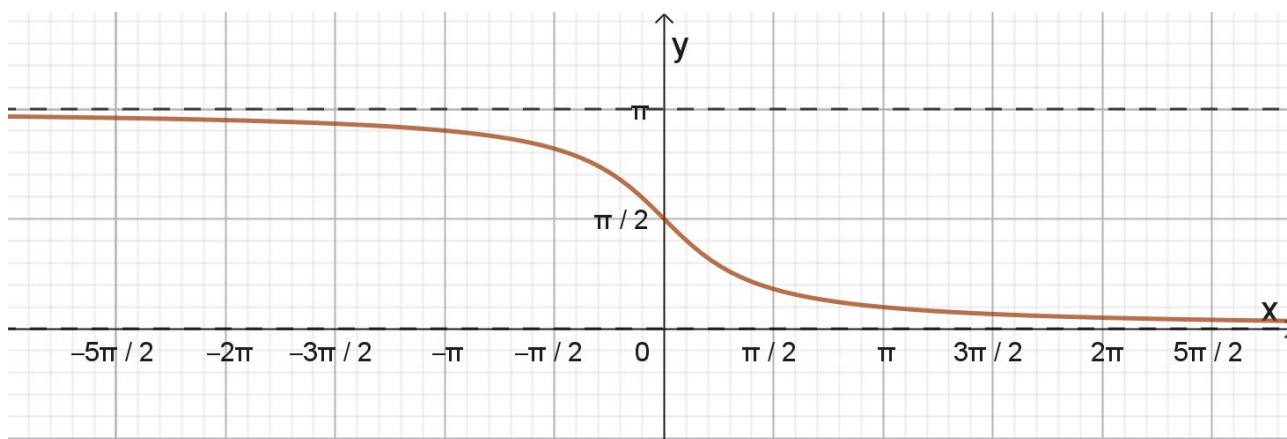
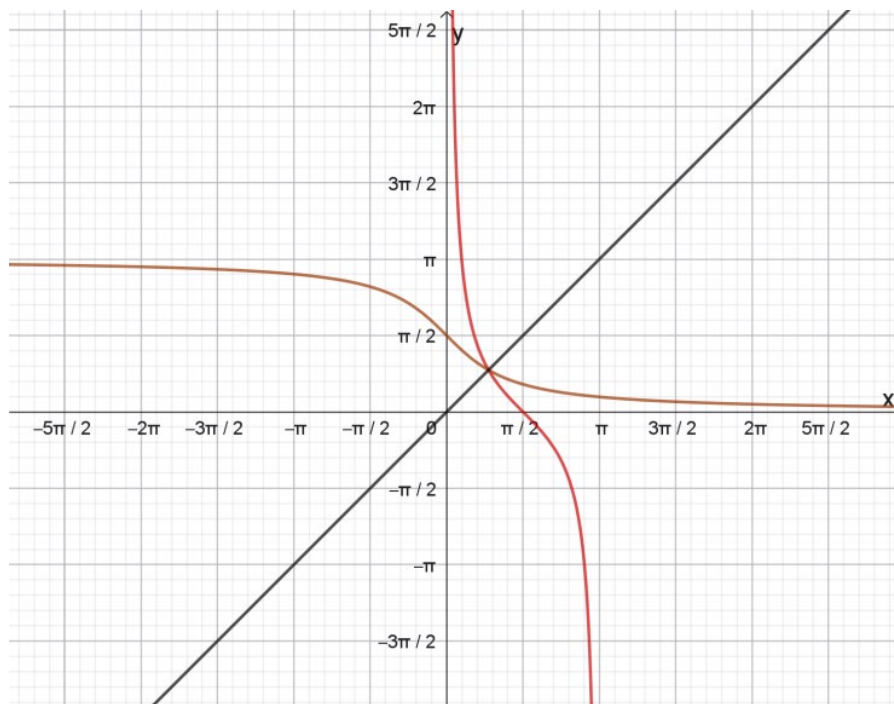
Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.



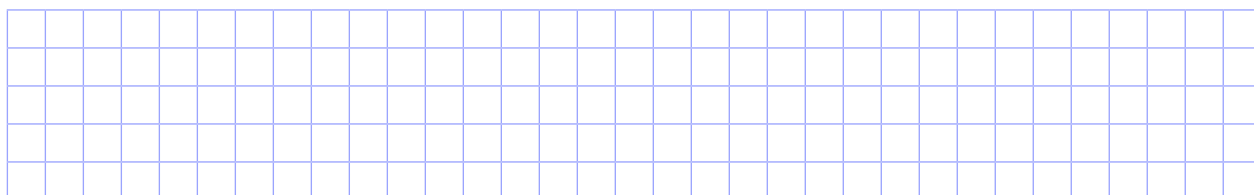
Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (див. рисунок).



Графік функції $y = \operatorname{arcsctg} x$ (див. рисунок).



Приклад 1. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2x$.

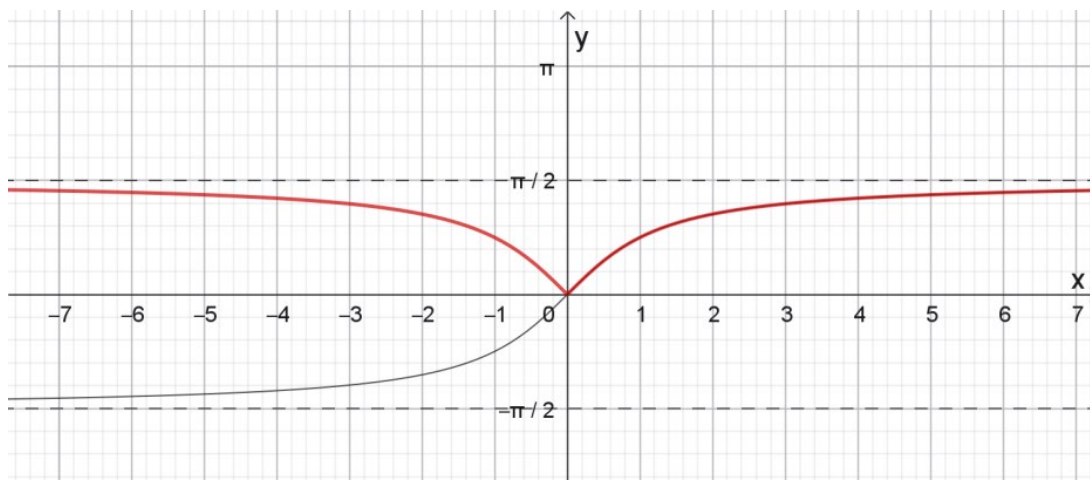


Приклад 2. За геометричними перетвореннями побудуйте графік функції

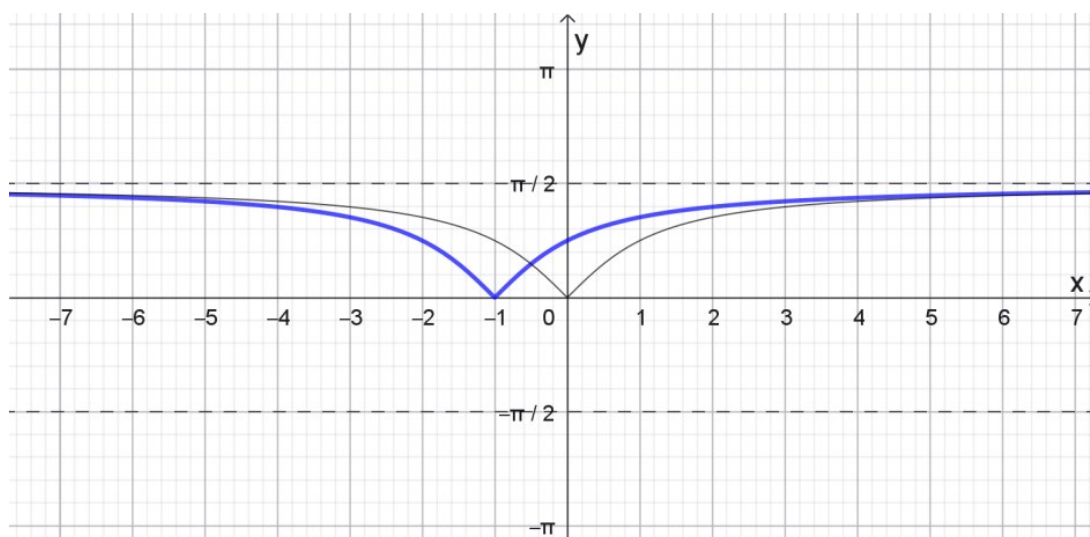
$$y = \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{2} + 1 \right|.$$

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.

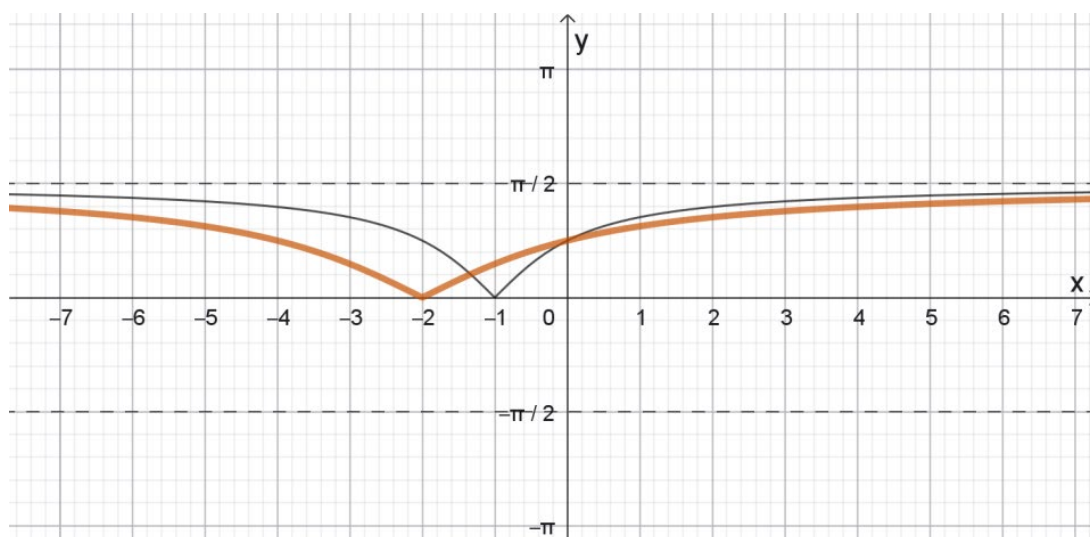
2) Із графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} |x|$. Для цього частину графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат (див. рисунок).



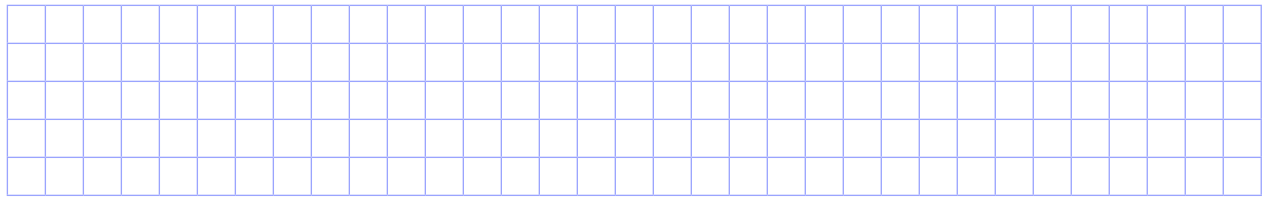
3) Будуємо графік функції $y = \arctg|x+1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \arctg|x|$ на одну одиницю ліворуч уздовж осі абсцис (див. рисунок).



4) Будуємо графік функції $y = \arctg\left|\frac{x}{2}+1\right|$ розтягнувши вдвічі графік функції $y = \arctg|x+1|$ від осі ординат (див. рисунок).



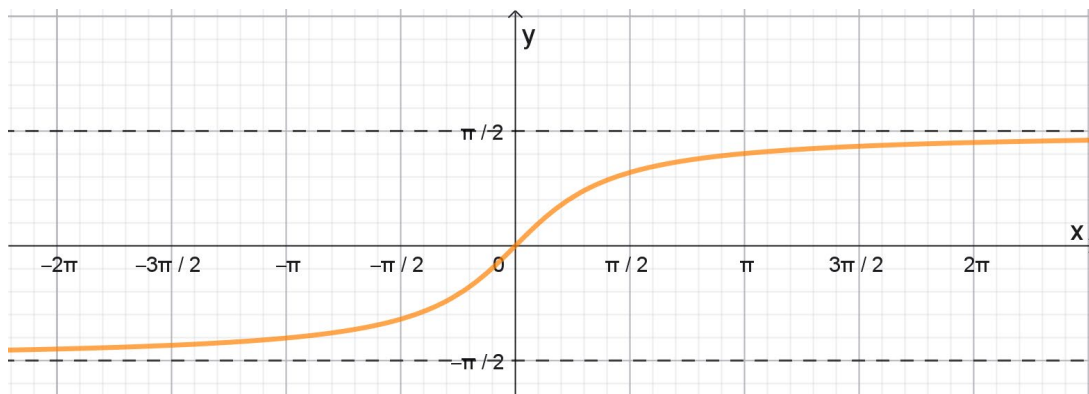
Приклад 3. Обчисліть: $\cos\left(2\arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.



V. Властивості функцій $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arccctg} x$

Функція $y = \arctg x$

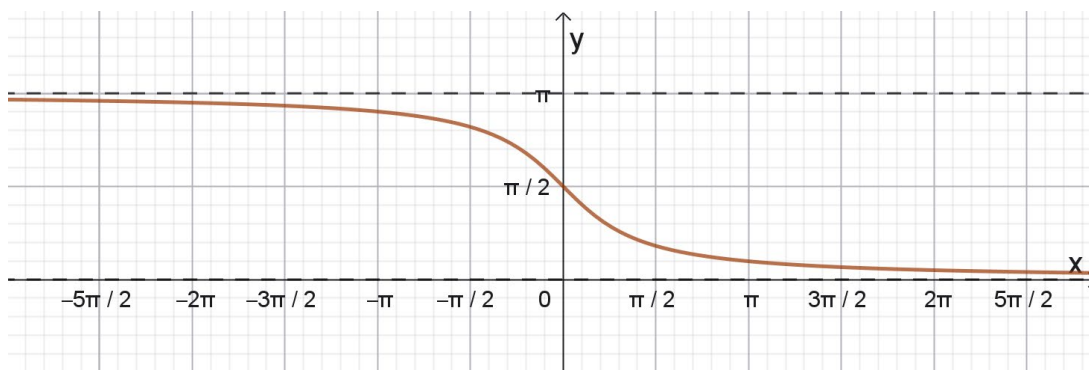
Графік функції $y = \arctg x$.



Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\arctg x > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\arctg x < 0$.
Парність	Функція непарна.
Монотонність	Зростаюча.

Функція $y = \operatorname{arccctg} x$

Графік функції $y = \operatorname{arccctg} x$.



Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$(0; \pi)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, тобто функція додатна на всій області визначення.
Парність	Функція ні парна, ні непарна.
Монотонність	Спадна.

Приклад 4. Доведіть, що $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$.

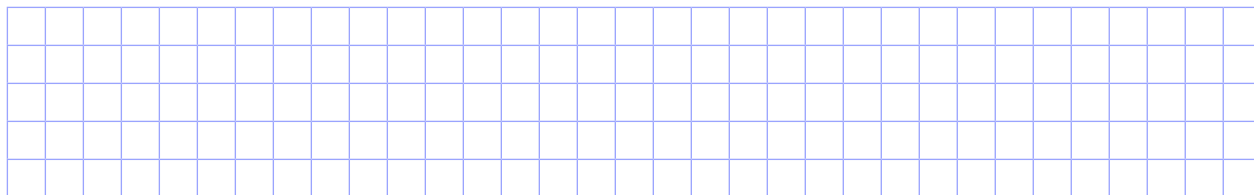
Доведення. Нехай $\operatorname{arctg}(-x) = \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$,

тоді $\operatorname{ctg} \alpha = -x$ або $-\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = x$.

Оскільки $0 < \pi - \alpha < \pi$, то $\pi - \alpha = \operatorname{arctg} x$, тобто $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} x$.

Отже, $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$, що й треба було довести.

Приклад 5. Знайдіть область визначення функції $y = \arccos(x - 3) + \operatorname{arctg} \sqrt{x - 2}$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Горизонтальний конвеєр має довжину 20 м. Координатну вісь x спрямували вздовж конвеєра так, що його середина відповідає точці $x = 0$, а краї — точкам $x = -10$ м і $x = 10$ м. Над серединою конвеєра, на висоті 3 м від його поверхні, закріплена камера спостереження. Камера може обертатися у вертикальній площині, щоб стежити за вантажем, який рівномірно рухається по конвеєру зі швидкістю 5 см/с. У момент часу $t = 0$ вантаж розташований у точці $x = -10$ м і починає рух до точки $x = 10$ м. Після того, як вантаж проходить усю відстань, на конвеєр кладуть наступний вантаж, і рух повторюється.

- 1) Запишіть функцію $x(t)$, яка задає положення вантажу залежно від часу.
- 2) Запишіть функцію кута повороту камери $\theta(t)$ відносно горизонталі (стелі), який камера має утворювати, щоб бути направленою точно на вантаж.
- 3) Укажіть період часу, протягом якого діє ця формула.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі натуральні значення n , що задовольня-

ють умову
$$\frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right)}{2} \leq \frac{\pi}{n}.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Порівняйте числа:

1) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ і $\operatorname{arctg} 1$;

2) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg} 1$ і $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

5) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ і $\operatorname{arctg} 1$;

6) $\operatorname{arctg} 1$ і $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ і $\operatorname{arctg}(-1)$;

8) $\arccos \frac{1}{2}$ і $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$; 2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 8) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right)$;

3) $4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,5)$;

4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

5) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(-1)$;

6) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

3) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x + 4$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arctg}(5 - 8x) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$; 3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; 4) $y = 2 \operatorname{arctg} x$;

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;

2) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;

3) $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$;

4) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{x + 5}$;

2) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x - 3}$;

3) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{5 - x})$;

4) $y = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{x + 7}$.

3. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$; 2) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$; 3) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 4) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(4 - 3x)) = 2$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{x}$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) \geq \sqrt{x}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x| + 1)$; 2) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x + 1|)$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(|x - 1|)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x + 2)) = x + 2$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg}(3x + 2) = \operatorname{arctg}(5x + 3)$; 2) $\operatorname{arctg}(x^2 - 4) = \operatorname{arctg}(2x + 4)$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{Atg}(\operatorname{arctg} x)}$.

11. Побудуйте графік та укажіть основні властивості функції:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} 4x$.

12. Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\operatorname{arctg}(-3)$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg}(-5)$; 2) $\operatorname{arctg} 0,2$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 12$;
3) $\operatorname{arctg}(-100)$, $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}(-2)$; 4) $\operatorname{arctg} 50$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 10$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення і множину значень функції:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3}x - x^2)$.

2. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\arccos 2x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$; 2) $\operatorname{arctg}(x - 1) = \arcsin x$.

3. Розв'яжіть графічно нерівність $\operatorname{arctg} x \leq \operatorname{arctg} x$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) $y = \operatorname{arctg}(2x - 1)$; 3) $y = \operatorname{arctg}(2 - 5x)$; 4) $y = \operatorname{ctg}(3x + 2)$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x| - 1) + \frac{\pi}{6}$; 2) $y = 3 \operatorname{arctg} 2|x| - \frac{1}{2}$;
3) $y = -2 \operatorname{arctg}(|x| + 2) + \frac{3\pi}{4}$; 4) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}|x| - 3\right) - \frac{\pi}{3}$.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$

2) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 4x + 3};$

3) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2 - 3x + 2};$

4) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x).$

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка моделює ситуацію описану в прикладній задачі 1.

Рефлексія

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

5) Я припустився/припустилася помилки

.....

6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

.....

7) Поради собі до наступного уроку

.....

Можливі теми проєктів

1. Дослідження функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ при відстеженні об'єктів.
2. Порівняння використання функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ у прикладних задачах техніки.
3. Вивчення «сліпих» зон камер спостереження за допомогою функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
4. Перетворення графіків функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
5. Алгоритмічне дослідження функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ у різних мовах програмування.





