

11

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 17. Функції $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення функцій $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
2. Побудова графіків функцій $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
3. Властивості функцій $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) За допомогою яких функцій можна знайти кут напрямку на об'єкт, якщо відомо відношення його зміщень по осях?

2) Чи можна за тангенсом кута однозначно вказати сам кут?

3) За допомогою якої функції інженер може визначити кут під яким встановити опору або сходи, якщо йому відомо лише висота і відступ?

4) Чи можна за графіком функції $y = \operatorname{ctg} x$ побудувати графік функції $y = \operatorname{arctg} x$?

5) Які функції допомагають знайти кут повороту відеокамери, щоб фіксувати об'єкт на певній висоті або відстані?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg}(-1)$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4}$.

2. Розташуйте в порядку зростання: $\arccos 0,9$, $\arccos(-0,6)$, $\arccos \frac{\pi}{5}$.

Відповідь. $\arccos 0,9$, $\arccos \frac{\pi}{5}$, $\arccos(-0,6)$.

3. Відомо, що $\arcsin x = \frac{\pi}{10}$. Знайдіть $\arcsin x$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{5}$.

4. Визначте знак числа a , якщо $a = \arcsin 0,3 - \arcsin 0,2$.

Відповідь. $a > 0$.

5. Укажіть множину значень функції $y = 2 \arccos x$.

Відповідь. $[0; 2\pi]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Горизонтальний конвеєр має довжину 20 м. Координатну вісь x спрямували вздовж конвеєра так, що його середина відповідає точці $x = 0$, а краї — точкам $x = -10$ м і $x = 10$ м. Над серединою конвеєра, на висоті 3 м від його поверхні, закріплена камера спостереження. Камера може обертатися у вертикальній площині, щоб стежити за вантажем, який рівномірно рухається по конвеєру зі швидкістю 5 см/с. У момент часу $t = 0$ вантаж розташований у точці $x = -10$ м і починає рух до точки $x = 10$ м. Після того, як вантаж проходить усю відстань, на конвеєр кладуть наступний вантаж, і рух повторюється.

- 1) Запишіть функцію $x(t)$, яка задає положення вантажу залежно від часу.
- 2) Запишіть функцію кута повороту камери $\theta(t)$ відносно горизонталі (стелі), який камера має утворювати, щоб бути направленою точно на вантаж.
- 3) Укажіть період часу, протягом якого діє ця формула.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі натуральні значення n , що задовольняють умову

$$\frac{\arctg 3 + \arctg \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right)}{2} \leq \frac{\pi}{n}.$$

III. Означення функцій $y = \arctg x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

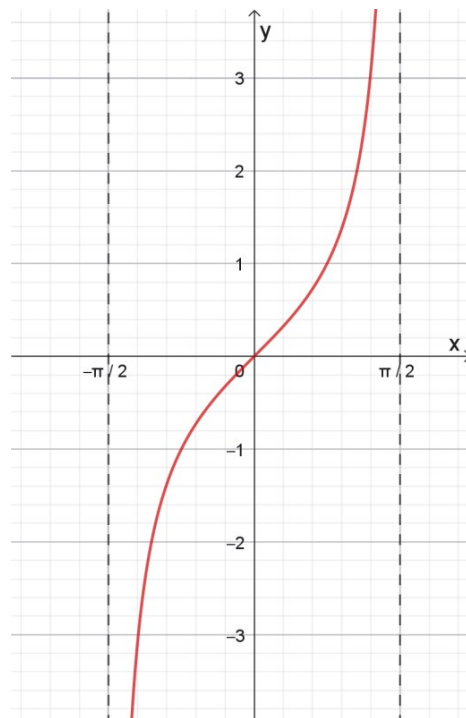
(див. рисунок).

Оскільки рівняння $\operatorname{tg} x = y$, для будь-якого y має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \arctg y$.

Тепер розглянемо функцію $y = \arctg x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \arctg y$ або до функції

$y = \operatorname{tg} x$, область визначення якої є множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Доведення. Область визначення функції $y = \arctg x$ збігається з областю значень функції $x = \arctg y$, а область значень функції $y = \arctg x$ збігається з областю визначення функції $x = \arctg y$. Причому, за цих умов $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$, тому функція $y = \arctg x$ є оберненою до функції $x = \arctg y$.

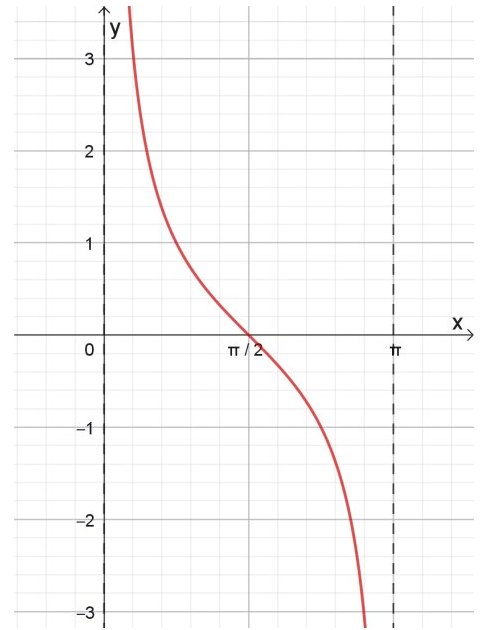


Означення. Функцію, обернену до функції $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, називають арктангенсом і позначають $y = \arctg x$.

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ (див. рисунок).

Оскільки рівняння $\operatorname{ctg} x = y$, для будь-якого y має єдиний корінь, то можна це рівняння записати у вигляді $x = \operatorname{arccotg} y$. Тепер розглянемо функцію $y = \operatorname{arccotg} x$ і доведемо, що вона обернена до функції $x = \operatorname{arccotg} y$ або до функції $y = \operatorname{ctg} x$, область визначення якої є множина $(0; \pi)$.

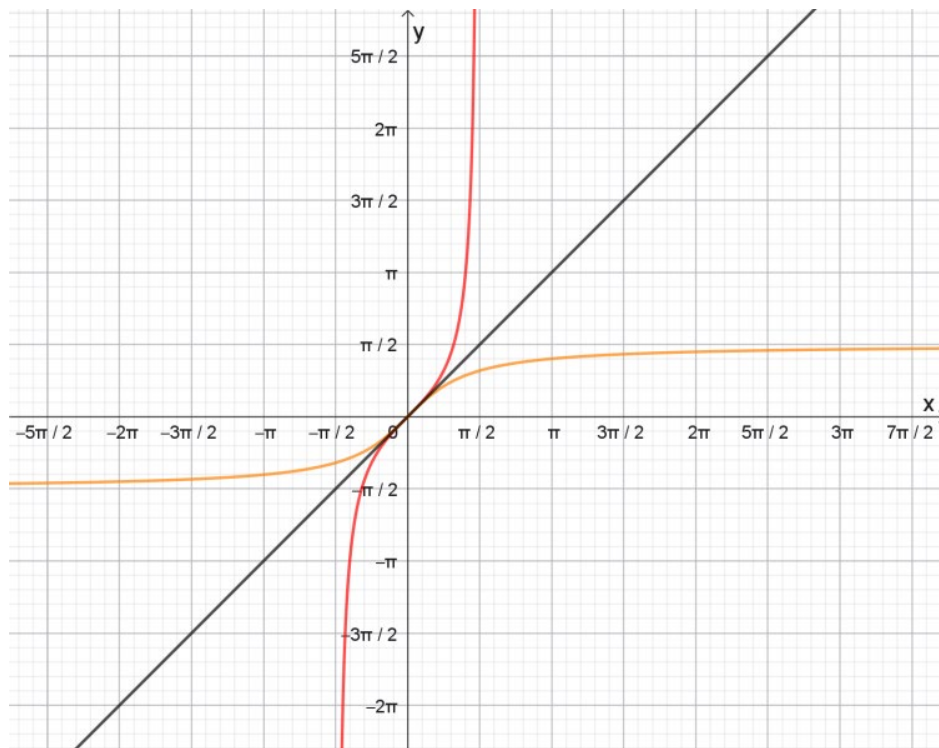
Доведення. Область визначення функції $y = \operatorname{arccotg} x$ збігається з областю значень функції $x = \operatorname{arccotg} y$, а також область значень функції $y = \operatorname{arccotg} x$ збігається з областю визначення функції $x = \operatorname{arccotg} y$. Причому, за цих умов $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x$. Тому функція $y = \operatorname{arccotg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{arccotg} y$.



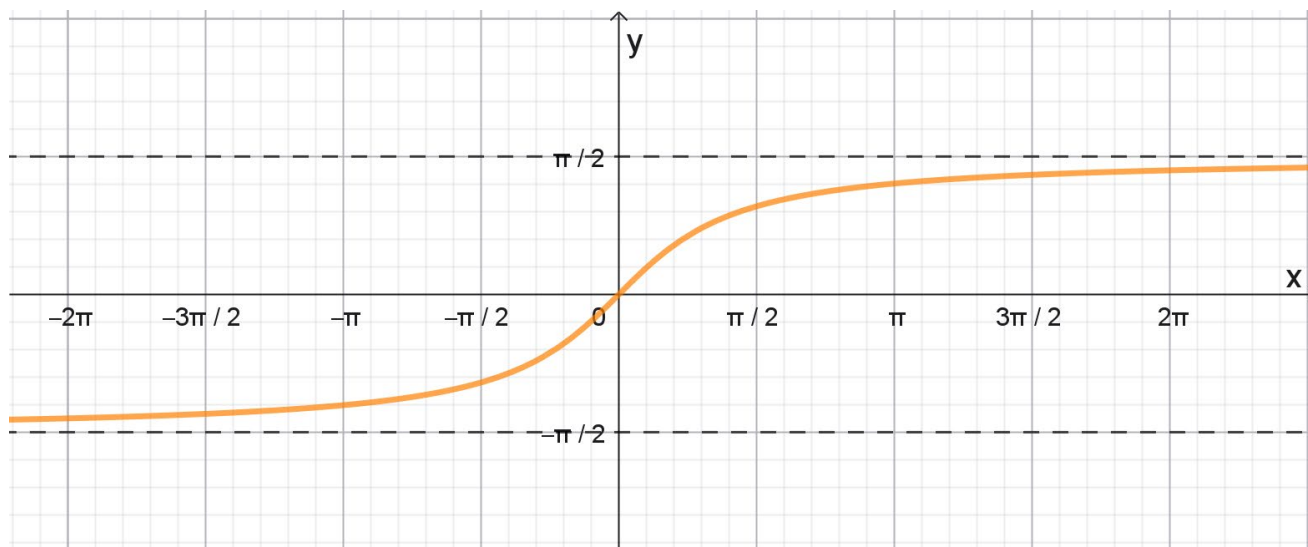
Означення. Функцію, обернену до функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, називають арккотангенсом і позначають $y = \operatorname{arccotg} x$.

IV. Побудова графіків функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$

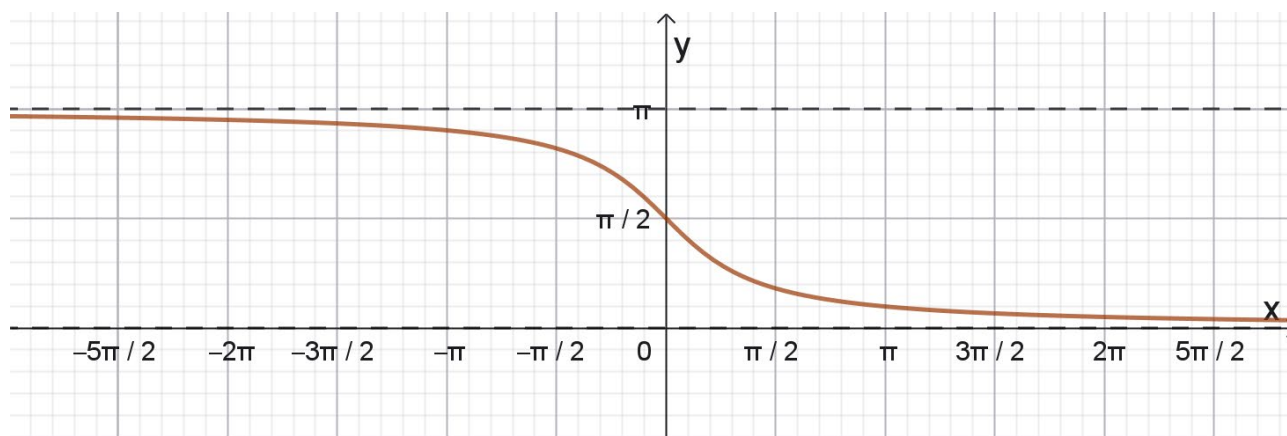
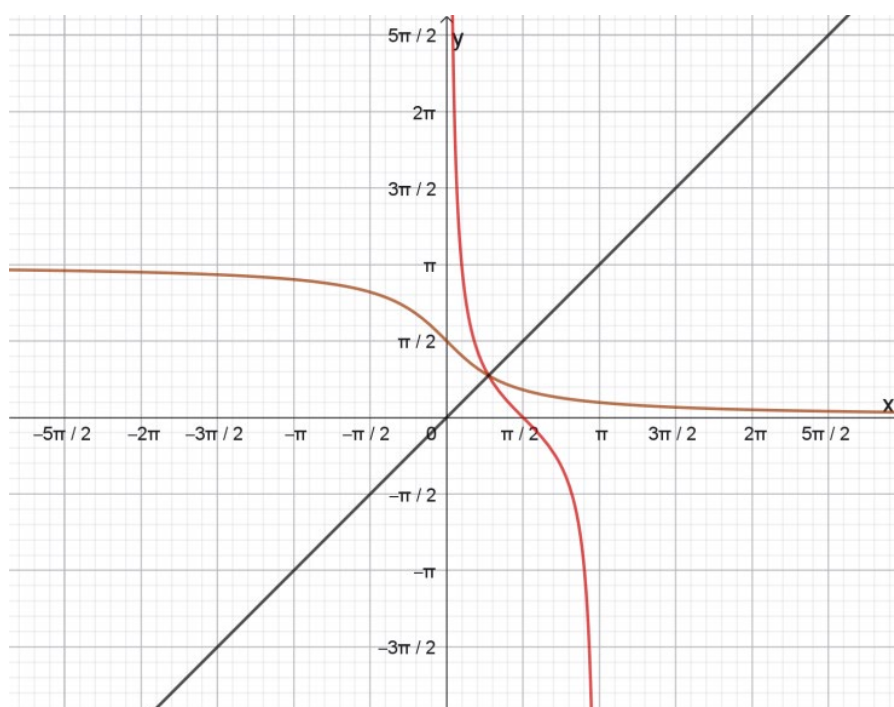
Відомо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.



Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (див. рисунок).



Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (див. рисунок).



Ілюстративні приклади

6. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2x$.

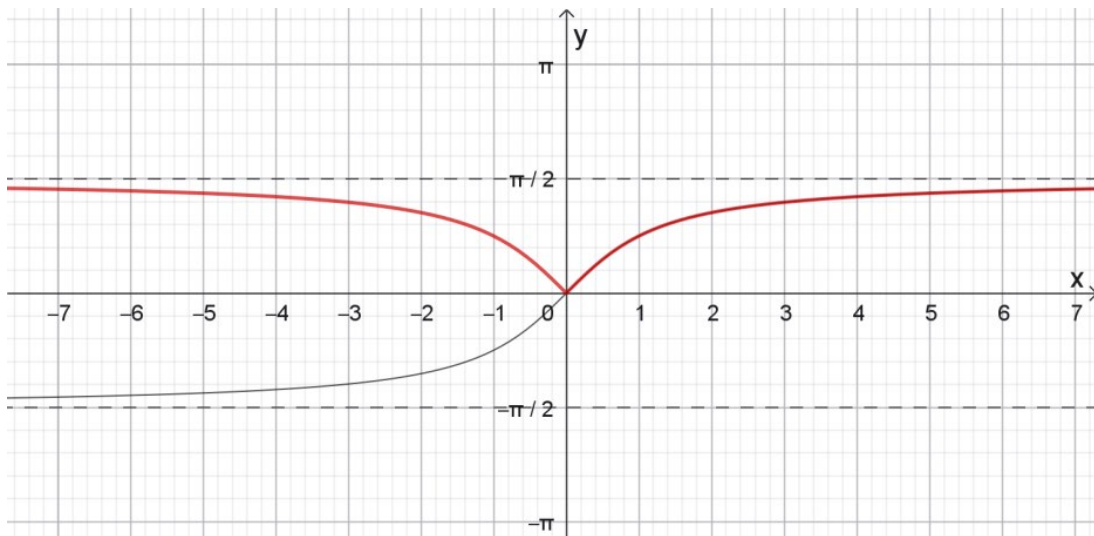
Розв'язання. $0 < \operatorname{arctg} 2x < \pi$, $-\pi < -\operatorname{arctg} 2x < 0$, $-\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2x < \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

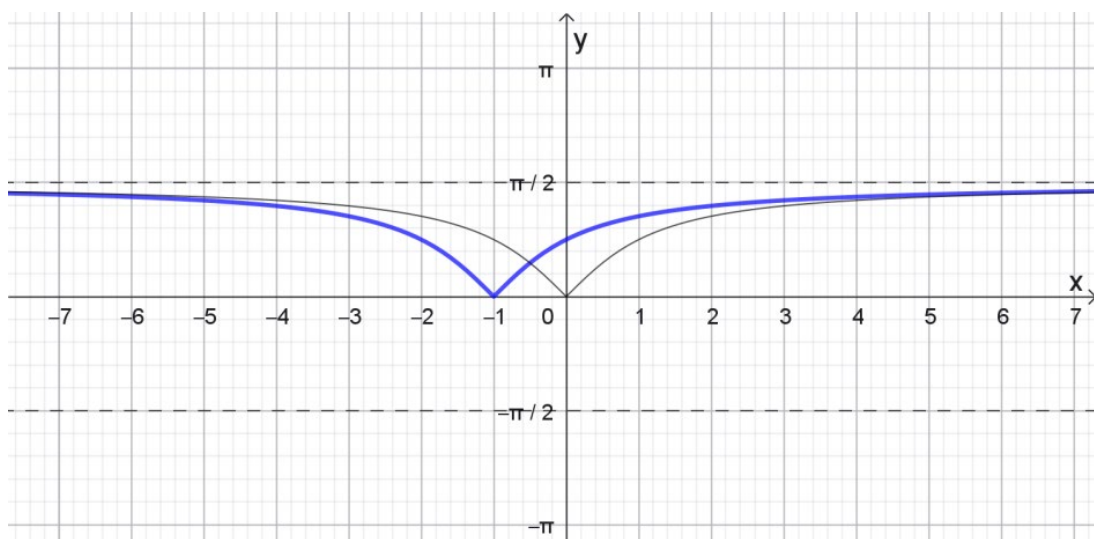
7. За геометричними перетвореннями побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{2} + 1 \right|$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.

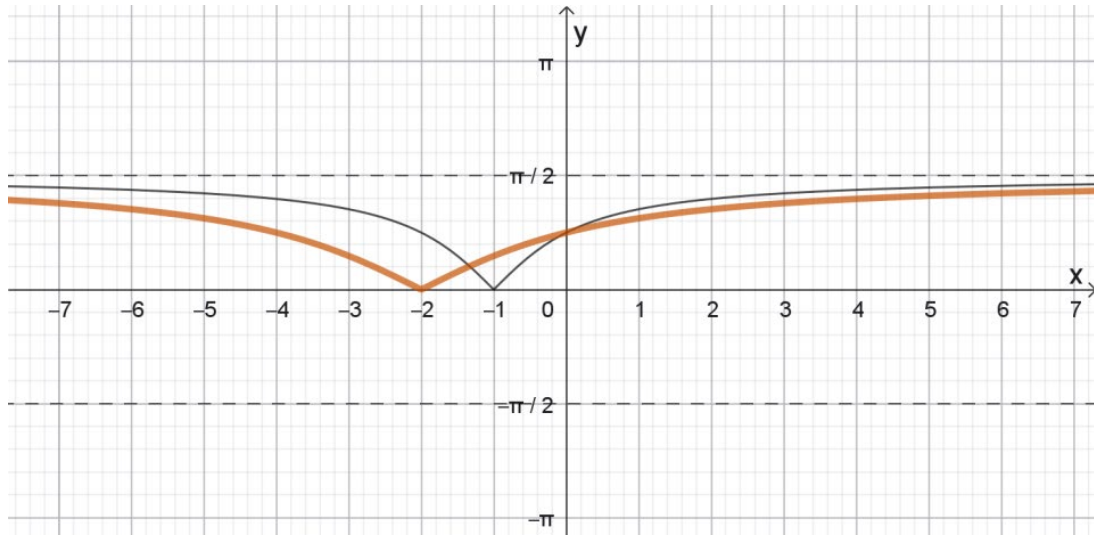
2) Із графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} |x|$. Для цього частину графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат (див. рисунок).



3) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} |x+1|$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \operatorname{arctg} |x|$ на одну одиницю ліворуч уздовж осі абсцис (див. рисунок).



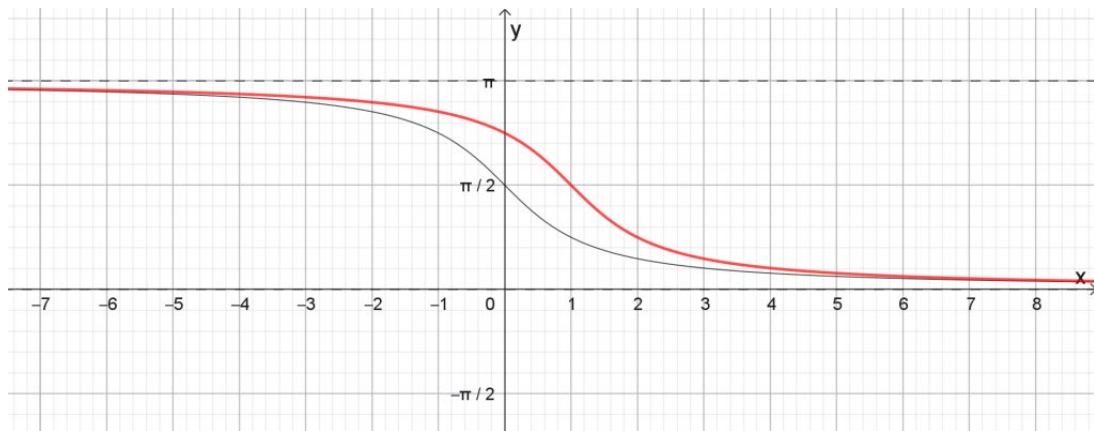
4) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg}\left|\frac{x}{2}+1\right|$ розтягнувши вдвічі графік функції $y = \operatorname{arctg}|x+1|$ від осі ординат (див. рисунок).



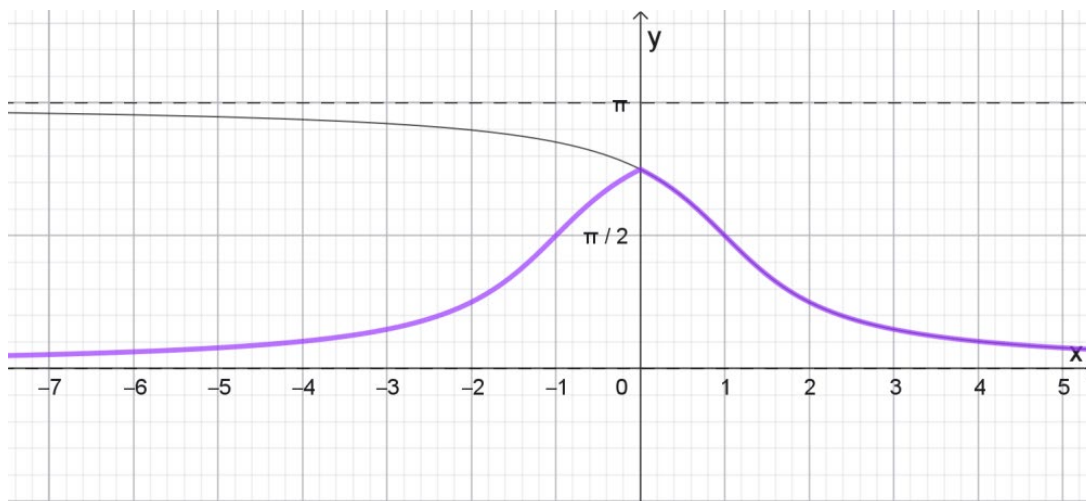
8. За геометричними перетвореннями побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(|x|-1)$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.

2) Будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg}(x-1)$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ на одну одиницю праворуч уздовж осі абсцис (див. рисунок).



3) Із графіка функції $y = \operatorname{arctg}(x+1)$ будуємо графік функції $y = \operatorname{arctg}(|x|+1)$. Для цього частину графіка функції $y = \operatorname{arctg}(x+1)$, де $x \geq 0$ залишаємо без змін, а потім відобразимо її симетрично відносно осі ординат (див. рисунок).



9. Обчисліть: $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$.

Запишемо: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$.

Звідси $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}$.

Відповідь. $\frac{4}{5}$.

10. Обчисліть: $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

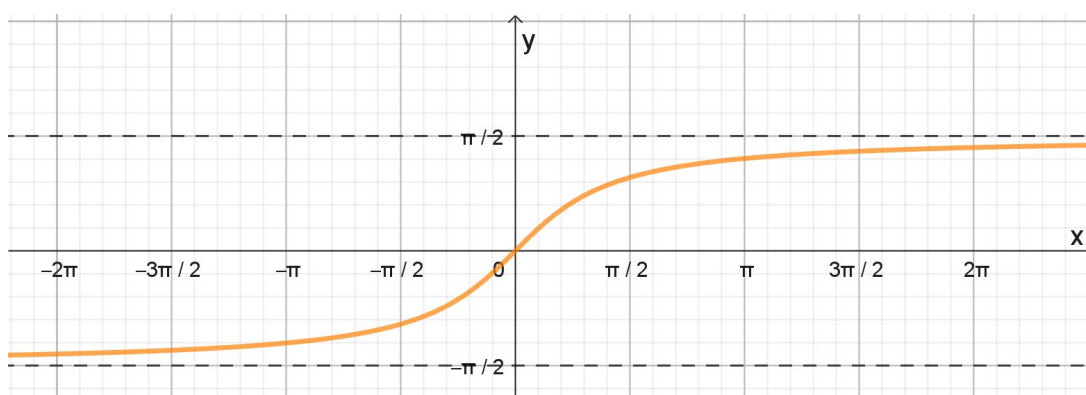
Розв'язання. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(5 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

Відповідь. -1 .

V. Властивості функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

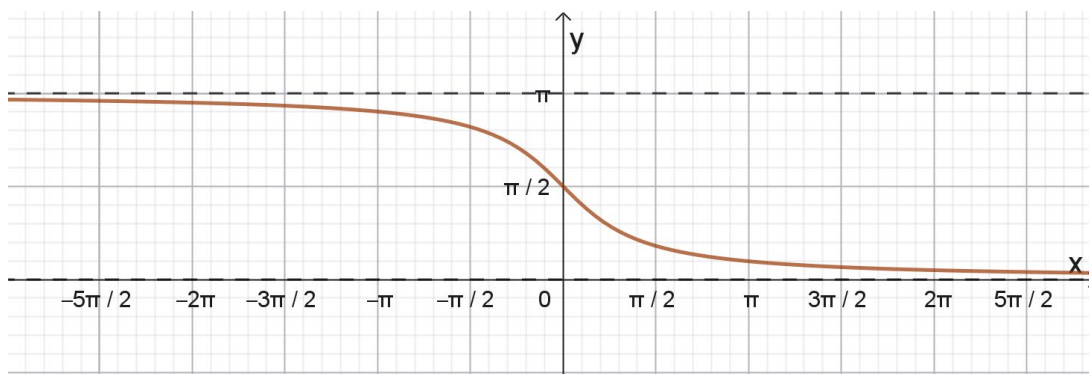
Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.



Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$.
Парність	Функція непарна.
Монотонність	Зростаюча.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.



Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$(0; \pi)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\operatorname{arcctg} x > 0$, тобто функція додатна на всій області визначення.
Парність	Функція ні парна, ні непарна.
Монотонність	Спадна.

Ілюстративні приклади

- 11.** Доведіть, що $\operatorname{arcc tg}(-x) = \pi - \operatorname{arcc tg} x$.

Доведення. Нехай $\operatorname{arcc tg}(-x) = \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$,

тоді $\operatorname{ctg} \alpha = -x$ або $-\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = x$.

Оскільки $0 < \pi - \alpha < \pi$, то $\pi - \alpha = \operatorname{arcc tg} x$, тобто $\alpha = \pi - \operatorname{arcc tg} x$.

Отже, $\operatorname{arcc tg}(-x) = \pi - \operatorname{arcc tg} x$, що й треба було довести.

- 12.** Знайдіть область визначення функції $y = \arccos(x - 3) + \operatorname{arctg} \sqrt{x - 2}$.

Розв'язання.
$$\begin{cases} -1 \leq x - 3 \leq 1, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Відповідь. $[2; 4]$.

13. Обчисліть: $\sin(2\operatorname{arctg} 5)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} 5 = \alpha$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = 5$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{10}{1 + 25} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$$

Відповідь. $\frac{5}{13}$.

14. Розв'яжіть рівняння $\cos(3\operatorname{arctg} \sqrt{x}) = 1$.

Розв'язання. $\cos(3\operatorname{arctg} \sqrt{x}) = 1$, $3\operatorname{arctg} \sqrt{x} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Оскільки $0 < \operatorname{arctg} \sqrt{x} < \pi$, то дане рівняння має розв'язок лише для $n = 1$.

Отже, $\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{x} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Оскільки $\sqrt{x} \geq 0$, то останнє рівняння коренів немає.

Відповідь. Коренів немає.

15. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{arctg}(5x + 3) \geq -\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(5x + 3) \geq \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою на всій області визначення, то дана нерівність рівносильна нерівності:

$$5x + 3 \geq -\sqrt{3}, \quad 5x \geq -3 - \sqrt{3}, \quad x \geq -\frac{3 + \sqrt{3}}{5}, \quad x \in \left[-\frac{3 + \sqrt{3}}{5}; +\infty\right).$$

Відповідь. $\left[-\frac{3 + \sqrt{3}}{5}; +\infty\right)$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

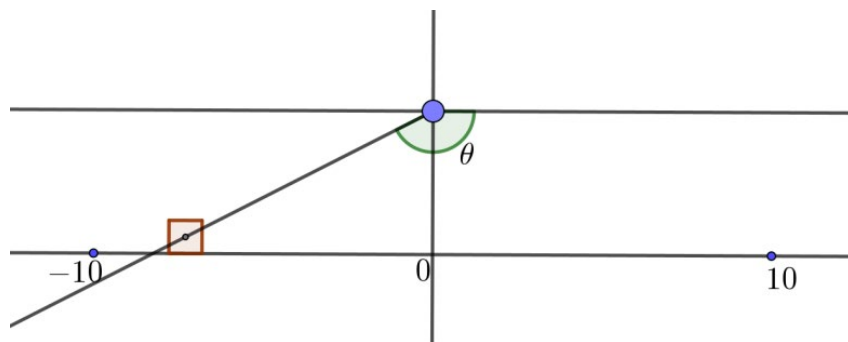
Задача 1. Горизонтальний конвеєр має довжину 20 м. Координатну вісь x спрямували вздовж конвеєра так, що його середина відповідає точці $x = 0$, а краї — точкам $x = -10$ м і $x = 10$ м. Над серединою конвеєра, на висоті 3 м від його поверхні, закріплена камера спостереження. Камера може обертатися у вертикальній площині, щоб стежити за вантажем, який рівномірно рухається по конвеєру зі швидкістю 5 см/с. У момент часу $t = 0$ вантаж розташований у точці $x = -10$ м і починає рух до точки $x = 10$ м. Після того, як вантаж проходить усю відстань, на конвеєр кладуть наступний вантаж, і рух повторюється.

1) Запишіть функцію $x(t)$, яка задає положення вантажу залежно від часу.

2) Запишіть функцію кута повороту камери $\theta(t)$ відносно горизонталі (стелі), який камера має утворювати, щоб бути наведеною точно на вантаж.

3) Укажіть період часу, протягом якого діє ця формула.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).



1) Оскільки рух прямолінійний і рівномірний, то $x(t) = -10 + 0,05t$.

2) $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{x(t)}$, $\theta(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{-10 + 0,05t} \right)$.

3) Вантаж проходить 20 м з швидкістю 0,05 м/с, тому $T = \frac{20}{0,05} = 400$ с.

Отже, формула для обчислення кута діє на інтервалі $0 \leq t \leq 400$.

Відповідь. 1) $x(t) = -10 + 0,05t$; 2) $\theta(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{-10 + 0,05t} \right)$; 3) $0 \leq t \leq 400$.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі натуральні значення n , що задовольня-

ють умову
$$\frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right)}{2} \leq \frac{\pi}{n}.$$

Розв'язання. Оскільки числа 3 і $2 + \frac{5}{\sqrt{3}}$ більші за $\sqrt{3}$, а $y = \operatorname{arctg} x$ — монотонно зростаюча функція, то виконуються нерівності:

$$\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) < \frac{\pi}{2}.$$

Тоді середнє арифметичне цих чисел, тобто число $A = \frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right)}{2}$, та-

кож належить проміжку $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right)$ і оскільки $A > 0$, то початкову нерівність можна

переписати у вигляді: $n \geq \frac{\pi}{A}$. Із наведеної оцінки для A випливає, що $2 < \frac{\pi}{A} < 3$.

Тому $n = 1$ або 2.

Відповідь. 1; 2.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Порівняйте числа:

1) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ і $\operatorname{arctg} 1$;

2) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg} 1$ і $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

5) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ і $\operatorname{arctg} 1$;

6) $\operatorname{arctg} 1$ і $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ і $\operatorname{arctg}(-1)$;

8) $\arccos \frac{1}{2}$ і $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$; 2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

5) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 8) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right)$;

3) $4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,5)$;

4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

5) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(-1)$;

6) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

3) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x + 4$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arctg}(5 - 8x) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$; 3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; 4) $y = 2 \operatorname{arctg} x$;

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;

2) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;

3) $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$;

4) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{x + 5}$;

2) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x - 3}$;

3) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{5 - x})$;

4) $y = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{x + 7}$.

3. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$; 2) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$; 3) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 4) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(4 - 3x)) = 2$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{x}$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) \geq \sqrt{x}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x| + 1)$; 2) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x + 1|)$; 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(|x - 1|)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x + 2)) = x + 2$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg}(3x + 2) = \operatorname{arctg}(5x + 3)$; 2) $\operatorname{arctg}(x^2 - 4) = \operatorname{arctg}(2x + 4)$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{Atg}(\operatorname{arctg} x)}$.

11. Побудуйте графік та укажіть основні властивості функції:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} 4x$.

12. Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\operatorname{arctg}(-3)$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg}(-5)$; 2) $\operatorname{arctg} 0,2$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 12$;
3) $\operatorname{arctg}(-100)$, $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}(-2)$; 4) $\operatorname{arctg} 50$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 10$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення і множину значень функції:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3}x - x^2)$.

2. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\arccos 2x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$; 2) $\operatorname{arctg}(x - 1) = \arcsin x$.

3. Розв'яжіть графічно нерівність $\operatorname{arctg} x \leq \operatorname{arctg} x$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) $y = \operatorname{arctg}(2x - 1)$; 3) $y = \operatorname{arctg}(2 - 5x)$; 4) $y = \operatorname{ctg}(3x + 2)$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(|x| - 1) + \frac{\pi}{6}$; 2) $y = 3 \operatorname{arctg} 2|x| - \frac{1}{2}$;
3) $y = -2 \operatorname{arctg}(|x| + 2) + \frac{3\pi}{4}$; 4) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}|x| - 3\right) - \frac{\pi}{3}$.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

2) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

3) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

4) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка моделює ситуацію описану в прикладній задачі 1.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

5) Я припустився/припустилася помилки

.....

6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

.....

7) Поради собі до наступного уроку

.....

Можливі теми проєктів

1. Дослідження функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ при відстеженні об'єктів.
2. Порівняння використання функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ у прикладних задачах техніки.
3. Вивчення «сліпих» зон камер спостереження за допомогою функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
4. Перетворення графіків функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.
5. Алгоритмічне дослідження функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ у різних мовах програмування.