

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 18. Урок —практикум. Обчислення значень виразів, що складаються зі взаємно обернених функцій. Побудова графіків. Формула суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) обчислювати значення виразів із оберненими тригонометричними функціями;
- 2) використовувати властивості функцій арктангенс та арккотангенс при розв'язуванні задач;
- 3) знаходити множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$;
- 4) застосовувати формули суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу;
- 5) будувати графіки взаємно обернених тригонометричних функцій;
- 6) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Порівняйте $\arccos 0,3$ і $\arccos 0,7$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin \frac{x}{2}$.
3. Знайдіть множину значень функції $y = -\frac{1}{2} \arccos x$.
4. Обчисліть $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.
5. Розв'яжіть рівняння $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$.

III. Обчислення значень виразів з оберненими тригонометричними функціями

Наведемо таблицю формул для обчислення значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій.

	$\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$	$\arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\sin x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq 1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \neq 0$	x	$\frac{1}{x}, x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \neq 0$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq 1$	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	x

Доведемо, що $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Нехай $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{x}$.

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Оскільки $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, що й треба було довести.

Примітка. Доцільніше запам'ятати спосіб, який використовується при доведенні формул, аніж завчати цілий масив формул.

Примітка. Доведення решти формул пропонуємо зробити в рамках дослідницького проекту.

Наведемо таблицю вираження будь-якої тригонометричної функції через інші.

	$\arcsin x$	$\arccos x$
$\arcsin x$	—	$\begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x < 0. \end{cases}$
$\arccos x$	$\begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x < 0. \end{cases}$	—

	$\arcsin x$	$\arccos x$
$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x < 0. \end{cases}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x < 0. \end{cases}$	$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\arcsin x$	$\arccos x$
$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$	$\begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, -1 \leq x < 0. \end{cases}$
$\arccos x$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi, -1 \leq x < 0. \end{cases}$	$\operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$
$\operatorname{arctg} x$	—	$\begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, x > 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, x < 0. \end{cases}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \pi, x < 0. \end{cases}$	—

Доведемо тотожність $\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x < 0. \end{cases}$

а) $0 \leq x \leq 1$. Позначимо $\arcsin x = \alpha$. Тоді $\sin \alpha = x$, де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Тоді $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ і, враховуючи α , маємо $\alpha = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

Тому $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ для $0 \leq x \leq 1$.

б) $-1 \leq x < 0$. Тоді $\arcsin x = -\arcsin(-x)$, де $0 < -x \leq 1$.

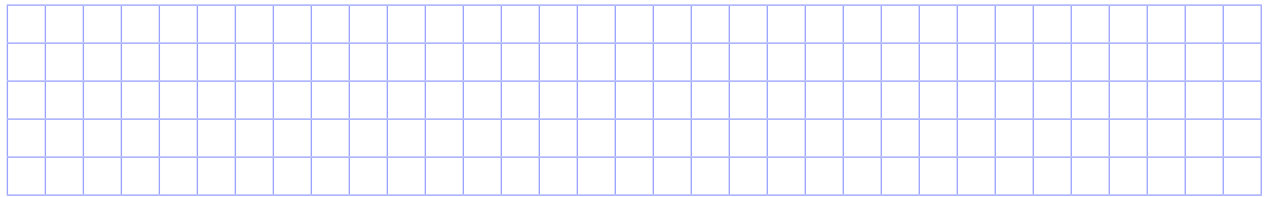
У цьому випадку маємо:

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1-(-x)^2} = -\arccos \sqrt{1-x^2}.$$

Решта формул мають аналогічний підхід до доведення.

Примітка. Доведіть ці формули в рамках дослідницького проекту.

Приклад 1. Обчисліть: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 470^\circ)$.



Приклад 2. Виразіть через інші три обернені тригонометричні функції $\arcsin \frac{3}{5}$.

Розв'язання. Нехай $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$, тоді $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$1) \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \alpha = \arccos \frac{4}{5}.$$

$$\text{Отже, } \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5};$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

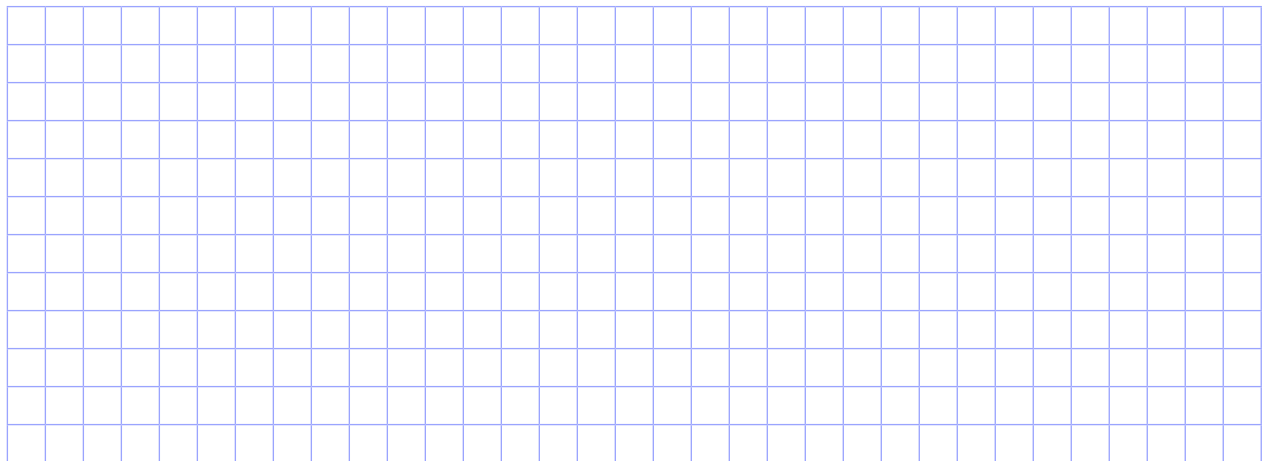
$$\text{Отже, } \arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4};$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

$$\text{Тоді } \arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

$$\text{Відповідь. } \arccos \frac{4}{5}; \operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Приклад 3. Обчисліть: $\sin(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.



IV. Застосування властивостей функцій арктангенс та арккотангенс

Нагадаємо основні властивості функцій арктангенс та арккотангенс.

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$

Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$.
Парність	Функція непарна.
Монотонність	Зростаюча.

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$

Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$(0; \pi)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, тобто функція додатна на всій області визначення.
Парність	Функція ні парна, ні непарна.
Монотонність	Спадна.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{arctg}(x-2) < \frac{5\pi}{6}$.

[illegible]

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\arcsin x + \operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$.

[illegible]

V. Обчислення множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$

Нагадаємо, що проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ є множиною значень функції $y = \arctg x$, а проміжок $(0; \pi)$ є множиною значень функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

Також корисно пам'ятати, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно зростає, а функція $y = \operatorname{arccotg} x$ монотонно спадає.

Ця властивість допомагає знаходити множину значень складеної функції, коли зовнішньою функцією є одна з функцій $y = \arctg x$ або $y = \operatorname{arccctg} x$.

VI. Застосування формули суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу

Теорема. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Доведемо, що $\arctg x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x < \frac{\pi}{2}$, то ліва і права частини рівності належать проміжку зростання функції $y = \tg x$, тому $\tg(\arctg x) = \tg\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x\right)$.

$$\tg(\arctg x) = x, \quad \tg\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} x) = x.$$

Тому $\arctg x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x$. Отже, $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$, що й треба було довести.

Приклад 6. Знайдіть найменше значення функції $y = (\arctg x)^2 + (\operatorname{arccctg} x)^2$.

Розв'язання. Оскільки $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$, то функцію $y = (\arctg x)^2 + (\operatorname{arccctg} x)^2$ можна подати у вигляді $y = 2(\arctg x)^2 - \pi \arctg x + \frac{\pi^2}{4}$.

Тому її можна розглядати як композицію функцій $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ і $t = \arctg x$.

При зміні змінної x від $-\infty$ до $+\infty$ значення змінної t заповнюють інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тому найменше значення функції $y(x)$ збігається з найменшим значенням функції $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ на інтервалі $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вершина параболи $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ має координати $t_0 = \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $y_0 = \frac{\pi^2}{8}$.

Тоді на інтервалі $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ найменше значення функції $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ дорівнює $\frac{\pi^2}{8}$.

Відповідь. $\frac{\pi^2}{8}$.

VII. Побудова графіків взаємно обернених тригонометричних функцій

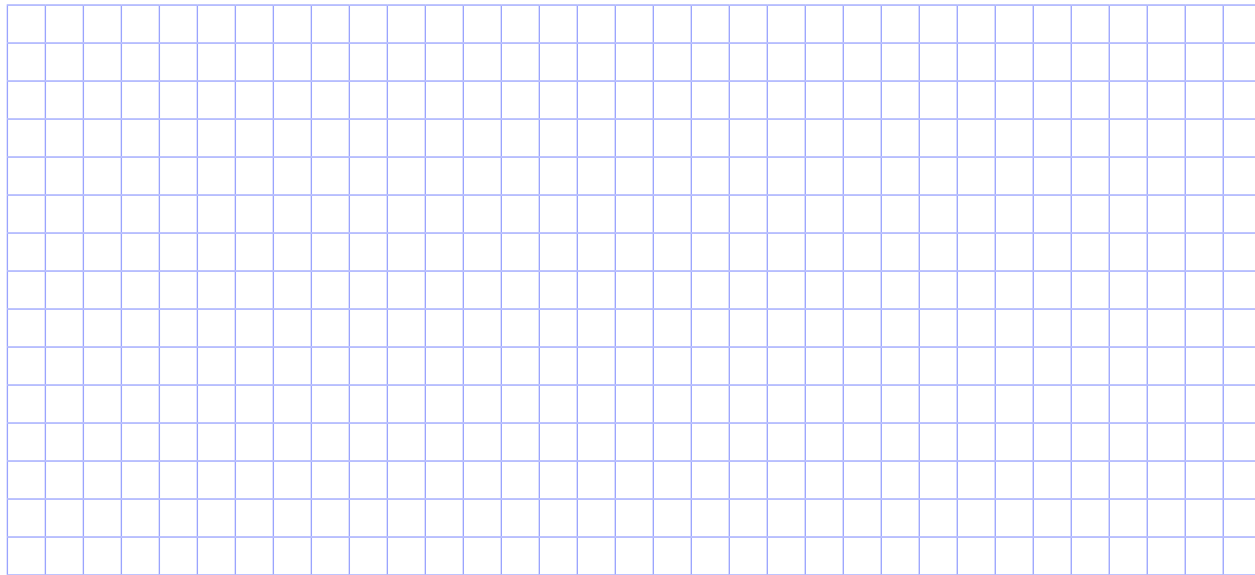
Нагадаємо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ та } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x$.

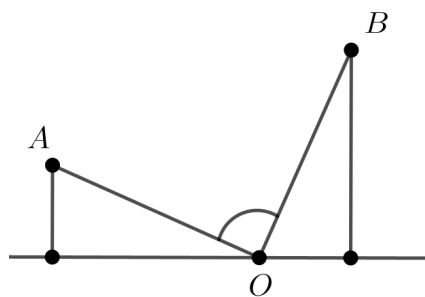
Приклад 7. Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x^2 + 2))$.



VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Оператор мостового крана знаходиться в кабіні — точці O . Йому потрібно розвантажувати вантаж з двох платформ, розташованих по різні боки від оператора: платформа A розміщена ліворуч від оператора на горизонтальній відстані 5 м, а висота її робочого майданчика становить 2 м над рівнем кабінки, платформа B розташована праворуч на горизонтальній відстані 2 м, але її рівень значно вищий — 5 м над кабіною (див. рисунок). Щоб безпечно й точно перевести стрілу крана з платформи A до платформи B , оператору потрібно знати кут повороту стріли крана між цими двома напрямками. Розрахуйте цей кут, використовуючи обернені тригонометричні функції.



Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:
1) $y = \operatorname{arctg}(-x)$; 2) $y = -\operatorname{arctg} x$; 3) $y = \operatorname{arctg}(-x)$; 4) $y = -\operatorname{arctg}(-x)$.
2. Побудуйте графік функції:
1) $y = \cos(\arccos x)$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x)$;
3) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 4) $y = \arcsin x + \arcsin(-x)$.
3. Обчисліть:
1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
4. Обчисліть:
1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 5)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \pi)$.
5. Обчисліть:
1) $\cos(\arcsin 0,6)$ 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{21}{29}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{15}{17}\right)$;
4) $\sin(\arccos(-0,28))$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}(\arccos 0,8)$.
6. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{\operatorname{arctg} x - 1}{3}$.

Рівень В

1. Дослідіть функцію на парність:
1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}$; 2) $y = \sin^2 x + x \operatorname{arctg} x$;
3) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$; 4) $y = 2 \operatorname{arctg} x + x^5 - 3 \arcsin 2x$.
2. Знайдіть множину значень функції:
1) $y = 2 \operatorname{arctg} x$; 2) $y = 1,5 \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}$;
3) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.
3. Побудуйте графік функції:
1) $y = \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \operatorname{arctg}(x+2) + \frac{\pi}{3}$.
4. Побудуйте графік функції:
1) $y = |\operatorname{arctg} x|$; 2) $y = -2 \operatorname{arctg}|x|$; 3) $y = \operatorname{arctg}|x|$; 4) $y = \left|\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{6}\right|$.

5. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \arccos x + \arccos(-x)$; 2) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;
3) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x)$; 4) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{x})$.

6. Обчисліть:

- 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin \frac{8}{17}\right)$;
3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6)$; 4) $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0,8))$.

7. Обчисліть:

- 1) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$; 3) $\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{12}{5}\right)$ 4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$.

8. Обчисліть:

- 1) $\sin\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{1}{8}\right)$; 3) $\cos\left(2\arccos \frac{4}{5}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{5}{13}\right)$.

9. Знайдіть множину значень функції $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x$.

10. Виразіть задане значення оберненої тригонометричної функції через три інші значення обернених тригонометричних функцій:

- 1) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$.

11. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos 0,6 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right) - \arcsin \frac{3}{5}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{5\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{9}\right)$.

12. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$; 2) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

Рівень С

1. Доведіть, що $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$

2. Доведіть, що:

- 1) $\sin^2\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\sin^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

3. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$.

4. Доведіть рівність $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} \frac{49}{43}$.

5. Обчисліть:

- 1) $\sin^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{3}{5} - 2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

6*. Обчисліть суму:

1) $S = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2};$

2) $S = \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7 + \dots + \operatorname{arctg} (n^2 + n + 1).$

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка за заданим значенням оберненої тригонометричної функції може обчислювати три інші значення обернених тригонометричних функцій.

Рефлексія

1. Я вмію обчислювати значення виразів із оберненими тригонометричними функціями.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, як використовувати властивості функцій арктангенс та арккотангенс при розв'язуванні задач.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я вмію знаходити множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arctg} x$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю, як застосовувати формули суми арктангенс та арккотангенс одного аргументу.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю, як будувати графіки взаємно обернених тригонометричних функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Геометричне й графічне обґрунтування формул зв'язку між арктангенсом і арккотангенсом одного числа.

2. Практичне застосування арктангенс і арккотангенс в задачах на обчислення кутів.

3. Доведення формул зв'язку між оберненими тригонометричними функціями.

4. Функція арктангенс у комп'ютерній графіці та робототехніці..

5. Історичний розвиток поняття про обернені тригонометричні функції.





