

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 18. Урок —практикум. Обчислення значень виразів, що складаються зі взаємно обернених функцій. Побудова графіків. Формула суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення значень виразів з оберненими тригонометричними функціями.
2. Застосування властивостей функцій арктангенс та арккотангенс.
3. Обчислення множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arccotg} x$.
4. Застосування формули суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу.
5. Побудова графіків взаємно обернених тригонометричних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна однозначно встановити кут за його тангенсом?

2) Чому графіки функцій арктангенса і арккотангенса мають асимптоти?

3) Як арктангенс допомагає описати поведінку фізичних систем?

4) Якщо відомий арктангенс, то чи можна однозначно визначити арккотангенс? Який між ними зв'язок?

5) Чи можна знаючи, наприклад арксинус, подати це число за допомогою інших обернених тригонометричних функцій?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Порівняйте $\arccos 0,3$ і $\arccos 0,7$.

Відповідь. $\arccos 0,3 > \arccos 0,7$.

2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin \frac{x}{2}$.

Відповідь. $[-2; 2]$.

3. Знайдіть множину значень функції $y = -\frac{1}{2} \arccos x$.

Відповідь. $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

4. Обчисліть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

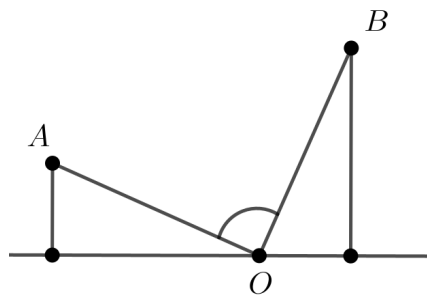
Відповідь. $-\frac{\pi}{6}$.

5. Розв'яжіть рівняння $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Відповідь. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Оператор мостового крана знаходиться в кабіні — точці O . Йому потрібно розвантажувати вантаж з двох платформ, розташованих по різні боки від оператора: платформа A розміщена ліворуч від оператора на горизонтальній відстані 5 м, а висота її робочого майданчика становить 2 м над рівнем кабінки, платформа B розташована праворуч на горизонтальній відстані 2 м, але її рівень значно вищий — 5 м над кабіною (див. рисунок). Щоб безпечно й точно перевести стрілу крана з платформи A до платформи B , оператору потрібно знати кут повороту стріли крана між цими двома напрямками. Розрахуйте цей кут, використовуючи обернені тригонометричні функції.



Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

III. Обчислення значень виразів з оберненими тригонометричними функціями

Наведемо таблицю формул для обчислення значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій.

	$\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$	$\arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$	$\arctg x$	$\operatorname{arctg} x$
$\sin x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq 1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \neq 0$	x	$\frac{1}{x}, x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \neq 0$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq 1$	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	x

Доведемо, що $\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Нехай $\arctg x = \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{x}$.

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Оскільки $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, що й треба було довести.

Примітка. Доцільніше запам'ятати спосіб, який використовується при доведенні формул, аніж завчати цілий масив формул.

Примітка. Доведення решти формул пропонуємо зробити в рамках дослідницького проекту.

Наведемо таблицю вираження будь-якої тригонометричної функції через інші.

	$\arcsin x$	$\arccos x$
$\arcsin x$	—	$\begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x < 0. \end{cases}$
$\arccos x$	$\begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x < 0. \end{cases}$	—
$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x < 0. \end{cases}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x < 0. \end{cases}$	$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\arcsin x$	$\arccos x$
$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, -1 \leq x < 0. \end{cases}$
$\arccos x$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi, -1 \leq x < 0. \end{cases}$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$
$\operatorname{arctg} x$	—	$\begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, x > 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, x < 0. \end{cases}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \pi, x < 0. \end{cases}$	—

Доведемо тотожність $\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$

а) $0 \leq x \leq 1$. Позначимо $\arcsin x = \alpha$. Тоді $\sin \alpha = x$, де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Тоді $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ і, враховуючи α , маємо $\alpha = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

Тому $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ для $0 \leq x \leq 1$.

б) $-1 \leq x < 0$. Тоді $\arcsin x = -\arcsin(-x)$, де $0 < -x \leq 1$.

У цьому випадку маємо:

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1-(-x)^2} = -\arccos \sqrt{1-x^2}.$$

Решта формул мають аналогічний підхід до доведення.

Примітка. Доведіть ці формули в рамках дослідницького проекту.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Обчисліть: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 470^\circ)$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 470^\circ) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(360^\circ + 110^\circ)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 110^\circ) =$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(90^\circ + 20^\circ)) = \operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} 20^\circ) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}\right) = \pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}.$$

Відповідь. $\frac{8\pi}{9}$.

7. Виразіть через інші три обернені тригонометричні функції $\arcsin \frac{3}{5}$.

Розв'язання. Нехай $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$, тоді $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$1) \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \alpha = \arccos \frac{4}{5}.$$

Отже, $\arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5}$;

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

Отже, $\arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$;

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Тоді $\arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Відповідь. $\arccos \frac{4}{5}$; $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$; $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

8. Обчисліть: $\sin(\arctg 2 + \arctg 3)$.

Розв'язання. Нехай $\arctg 2 = \alpha$, $\arctg 3 = \beta$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

тоді $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

Застосуємо формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

Оскільки $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad \frac{1}{\cos^2 \beta} = 10, \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{10}, \quad \sin^2 \beta = \frac{9}{10}.$$

Оскільки $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Доведіть, що $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Доведення. Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то $0 < \arctg \frac{1}{2} < \arctg 1$, $0 < \arctg \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Аналогічно, $0 < \arctg \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$. Тому $0 < \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Матимемо: } \operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Отже, $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, що й треба було довести.

IV. Застосування властивостей функцій арктангенс та арккотангенс

Нагадаємо основні властивості функцій арктангенс та арккотангенс.

Властивості функції $y = \arctg x$

Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Нулі функції	$x = 0$.

Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\arctg x > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\arctg x < 0$.
Парність	Функція непарна.
Монотонність	Зростаюча.

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$

Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.
Область значень	$(0; \pi)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, тобто функція додатна на всій області визначення.
Парність	Функція ні парна, ні непарна.
Монотонність	Спадна.

Ілюстративні приклади

- 10.** Дослідіть на парність функцію $f(x) = \arctg^2 3x$.

Розв'язання. Оскільки $f(-x) = \arctg^2(-3x) = (-\arctg 3x)^2 = \arctg^2 3x = y(x)$, то функція парна.

Відповідь. Функція парна.

- 11.** Розв'яжіть нерівність $\operatorname{arctg}(x-2) < \frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(x-2) < \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є спадною на всій області визначення, то дана нерівність рівносильна нерівності: $x-2 > -\sqrt{3}$, $x > 2 - \sqrt{3}$.

Відповідь. $(2 - \sqrt{3}; +\infty)$.

- 12.** Розв'яжіть нерівність $\arctg(2x^2 - 5x - 1) + \arctg(x^2 - 2x + 5) \leq 0$.

Розв'язання. $\arctg(2x^2 - 5x - 1) \leq -\arctg(x^2 - 2x + 5)$.

Оскільки функція $y = \arctg x$ є непарною, то остання нерівність рівносильна нерівності: $\arctg(2x^2 - 5x - 1) \leq \arctg(2x - x^2 - 5)$.

Оскільки функція $y = \arctg x$ є монотонно зростаючою, то

$$2x^2 - 5x - 1 \leq 2x - x^2 - 5, \quad 3x^2 - 7x + 4 \leq 0, \quad (x-1)\left(x - \frac{4}{3}\right) \leq 0, \quad 1 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Відповідь. $\left[1; \frac{4}{3}\right]$.

- 13.** Розв'яжіть рівняння $\arcsin x + \arctg x = \frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Функції $y = \arcsin x$ та $y = \arctg x$ — монотонно зростаючі. Тоді функція $y = \arcsin x + \arctg x$ є також монотонно зростаючою на відрізку $[-1; 1]$, тому

рівняння $\arcsin x + \operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$ не може мати більше одного кореня. Очевидно, що $x = 1$ є коренем цього рівняння.
Відповідь. 1.

V. Обчислення множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$

Нагадаємо, що проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ є множиною значень функції $y = \operatorname{arctg} x$, а проміжок $(0; \pi)$ є множиною значень функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

Також корисно пам'ятати, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно зростає, а функція $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно спадає.

Ця властивість допомагає знаходити множину значень складеної функції, коли зовнішньою функцією є одна з функцій $y = \operatorname{arctg} x$ або $y = \operatorname{arcctg} x$.

Ілюстративні приклади

- 14.** Знайдіть множину значень та найбільше й найменше значення функції $y = \operatorname{arctg}(4x - 2x^2)$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = 4x - 2x^2$, яка має максимум, що дорівнює 2, в точці $x = 1$. Отже, $E(g) = (-\infty; 2]$. Тоді для функції $y = \operatorname{arctg}(4x - 2x^2)$ (враховуючи те, що вона зростаюча) одержимо: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 2\right]$. Найбільше значення функції дорівнює $\operatorname{arctg} 2$, а найменшого не існує.

Відповідь. $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 2\right]$.

- 15.** Знайдіть множину значень функції $y = 6 - 2\operatorname{arcctg}(x - 1)$.

Розв'язання. $0 < \operatorname{arcctg}(x - 1) < \pi$, $-2\pi < -2\operatorname{arcctg}(x - 1) < 0$,
 $6 - 2\pi < 6 - 2\operatorname{arcctg}(x - 1) < 6$.

Отже, $E(y) = (6 - 2\pi; 6)$.

Відповідь. $(6 - 2\pi; 6)$.

VI. Застосування формули суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу

Теорема. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Доведемо, що $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}$, то ліва і права частини рівності належать проміжку зростання функції $y = \operatorname{tg} x$, тому $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)$.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Тому $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$. Отже, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, що й треба було довести.

Ілюстративні приклади

16. Знайдіть найменше значення функції $y = (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то функцію $y = (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2$ можна подати у вигляді $y = 2(\operatorname{arctg} x)^2 - \pi \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{4}$.

Тому її можна розглядати як композицію функцій $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ і $t = \operatorname{arctg} x$.

При зміні змінної x від $-\infty$ до $+\infty$ значення змінної t заповнюють інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тому найменше значення функції $y(x)$ збігається з найменшим значенням функції $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ на інтервалі $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вершина параболи $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ має координати $t_0 = \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $y_0 = \frac{\pi^2}{8}$.

Тоді на інтервалі $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ найменше значення функції $y = 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}$ дорівнює $\frac{\pi^2}{8}$.

Відповідь. $\frac{\pi^2}{8}$.

VII. Побудова графіків взаємно обернених тригонометричних функцій

Нагадаємо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ та } \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

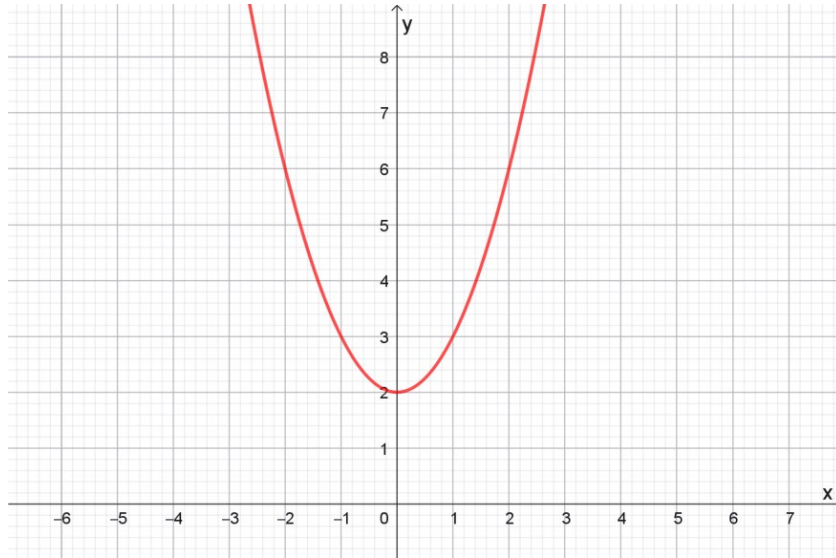
Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$.

Ілюстративні приклади

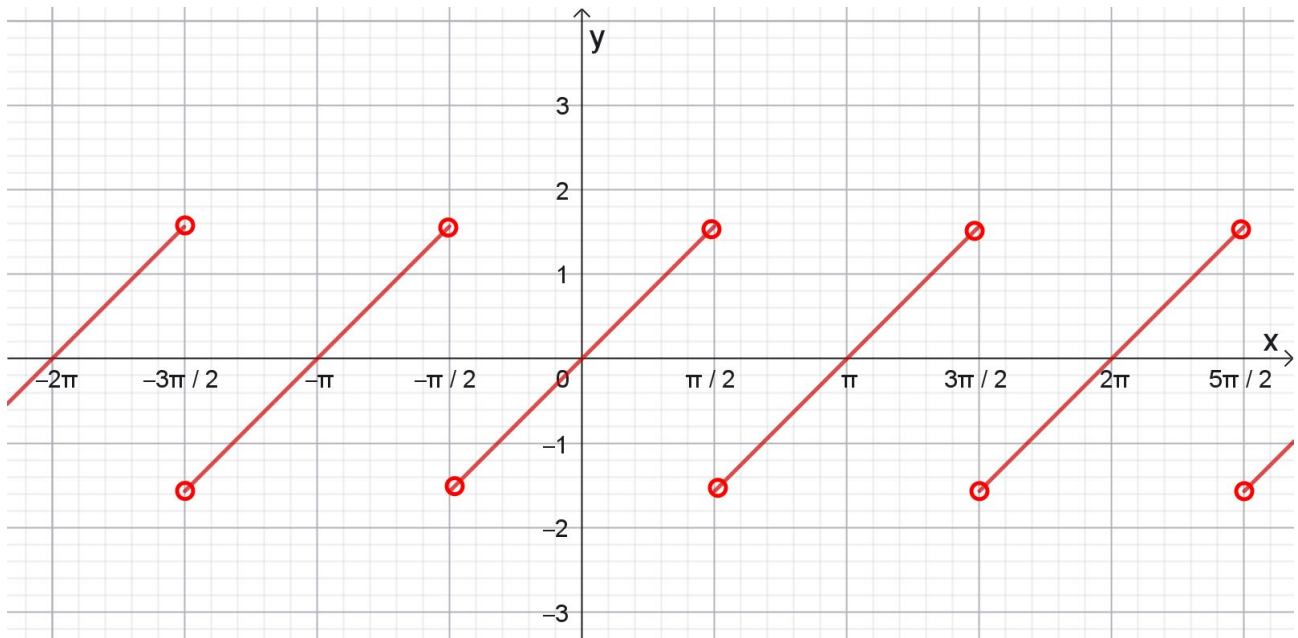
- 17.** Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x^2 + 2))$.

Розв'язання. Оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x$, то $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(x^2 + 2)) = x^2 + 2$.



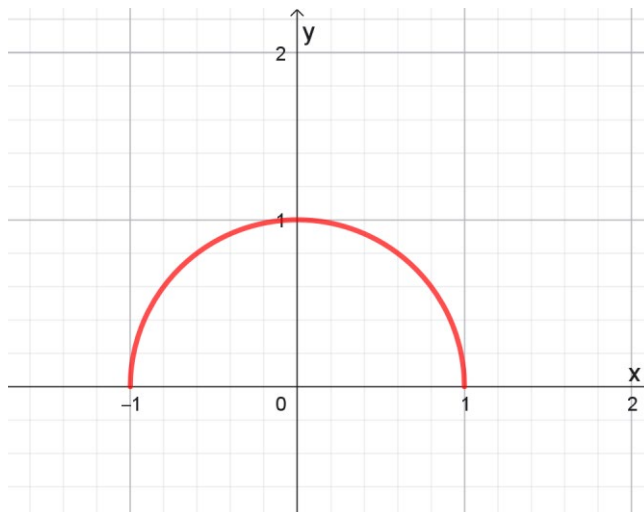
- 18.** Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Розв'язання. Дана функція періодична, з головним періодом π , тому достатньо побудувати її на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, але на цьому проміжку $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ (див. рисунок).



- 19.** Побудуйте графік функції $y = \sin(\arccos x)$.

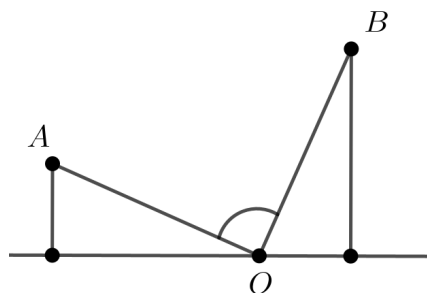
Розв'язання. $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ (див. рисунок).



VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Оператор мостового крана знаходиться в кабіні — точці O . Йому потрібно розвантажувати вантаж з двох платформ, розташованих по різні боки від оператора: платформа A розміщена ліворуч від оператора на горизонтальній відстані 5 м, а висота її робочого майданчика становить 2 м над рівнем кабінки, платформа B розташована праворуч на горизонтальній відстані 2 м, але її рівень значно вищий — 5 м над кабіною (див. рисунок). Щоб безпечно й точно перевести стрілу крана з платформи A до платформи B , оператору потрібно знати кут повороту стріли крана між цими двома напрямками. Розрахуйте цей кут, використовуючи обернені тригонометричні функції.



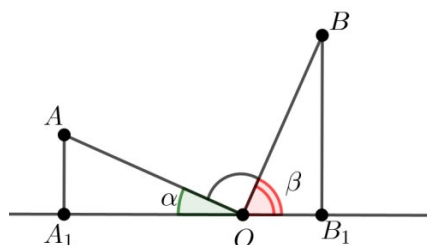
Розв'язання. Нехай точки A_1 та B_1 — перпендикулярні проекції точок A і B відповідно і $\angle AOA_1 = \alpha$, $\angle BOB_1 = \beta$ (див. рисунок).

Тоді, за умовою, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{5}$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{5}{2}$.

Оскільки $\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \operatorname{arctg} \frac{5}{2} = \frac{\pi}{2}$, то $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

Отже, стрілу треба повернути на кут 90° .

Відповідь. 90° .



Задача 2. Конкурсна задача. Доведіть, що $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Доведення. Нехай $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \alpha_1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha_2$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \alpha_3$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \alpha_4$, де $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$, тому $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < \pi$.

Для доведення даної рівності достатньо показати, що $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 1$.

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{4}{7},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3 + \operatorname{tg} \alpha_4}{1 - \operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{11}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_4)} = \frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11}} = 1,$$

що й треба було довести.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(-x)$; 2) $y = -\operatorname{arctg} x$; 3) $y = \operatorname{arctg}(-x)$; 4) $y = -\operatorname{arctg}(-x)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(\arccos x)$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x)$;
3) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 4) $y = \arcsin x + \arcsin(-x)$.

3. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 1 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 5)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \pi)$.

5. Обчисліть:

1) $\cos(\arcsin 0,6)$ 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{21}{29}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{15}{17}\right)$;
4) $\sin(\arccos(-0,28))$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}(\arccos 0,8)$.

6. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{\operatorname{arctg} x - 1}{3}$.

Рівень В

1. Дослідіть функцію на парність:

1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}$; 2) $y = \sin^2 x + x \operatorname{arctg} x$;
3) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$; 4) $y = 2 \operatorname{arctg} x + x^5 - 3 \arcsin 2x$.

2. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 2 \operatorname{arctg} x$;

2) $y = 1,5 \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$;

3) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x$;

4) $y = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \operatorname{arcctg}(x+2) + \frac{\pi}{3}$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = |\operatorname{arctg} x|$; 2) $y = -2 \operatorname{arcctg} |x|$; 3) $y = \operatorname{arcctg} |x|$; 4) $y = \left| \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{6} \right|$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

2) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;

3) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$;

4) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x} + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{x})$.

6. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin \frac{8}{17}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6)$;

4) $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0,8))$.

7. Обчисліть:

1) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$; 3) $\cos\left(\operatorname{arcctg} \frac{12}{5}\right)$ 4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$.

8. Обчисліть:

1) $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}\right)$; 3) $\cos\left(2 \arccos \frac{4}{5}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right)$.

9. Знайдіть множину значень функції $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$.

10. Виразіть задане значення оберненої тригонометричної функції через три інші значення обернених тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$.

11. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos 0,6 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right) - \arcsin \frac{3}{5}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{5\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{9}\right)$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$;

2) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

Рівень С

1. Доведіть, що $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$
2. Доведіть, що:
 - 1) $\sin^2 \left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2};$
 - 2) $\sin^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2}.$
3. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$.
4. Доведіть рівність $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} \frac{49}{43}.$
5. Обчисліть:
 - 1) $\sin^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) \right);$
 - 2) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2) \right).$
- 6*. Обчисліть суму:
 - 1) $S = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2};$
 - 2) $S = \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7 + \dots + \operatorname{arctg} (n^2 + n + 1).$
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка за заданим значенням оберненої тригонометричної функції може обчислювати три інші значення обернених тригонометричних функцій.

Х. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | | |
|----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію обчислювати значення виразів із оберненими тригонометричними функціями. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як використовувати властивості функцій арктангенс та арккотангенс при розв'язуванні задач. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію знаходити множини значень функцій $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arctg} x$. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як застосовувати формули суми арктангенса та арккотангенса одного аргументу. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як будувати графіки взаємно обернених тригонометричних функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Геометричне й графічне обґрунтування формул зв'язку між арктангенсом і арккотангенсом одного числа.
2. Практичне застосування арктангенса і арккотангенса в задачах на обчислення кутів.
3. Доведення формул зв'язку між оберненими тригонометричними функціями.
4. Функція арктангенса у комп'ютерній графіці та робототехніці..
5. Історичний розвиток поняття про обернені тригонометричні функції.