

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 2. Урок–практикум. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили навички розв'язування рівнянь $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$;
- 2) навчилися обчислювати значення арккосинусів різних чисел;
- 3) навчилися розв'язувати рівняння виду $\cos x = a$ із застосуванням загальної формули коренів;
- 4) навчилися використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Перетворіть суму $\cos 4E + \cos 2E$ в добуток.
2. Спростіть вираз $\sin^2 10x$, за формулою пониження степеня.
3. Знайдіть значення виразу $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
4. Знайдіть область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.
5. Перетворіть у добуток вираз $\sin x + \cos x$, за формулою суми косинусів.

III. Розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію $y = \cos x$.

- 1) Функція $y = \cos x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 1$.
- 2) Функція $y = \cos x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 у точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = -1$.

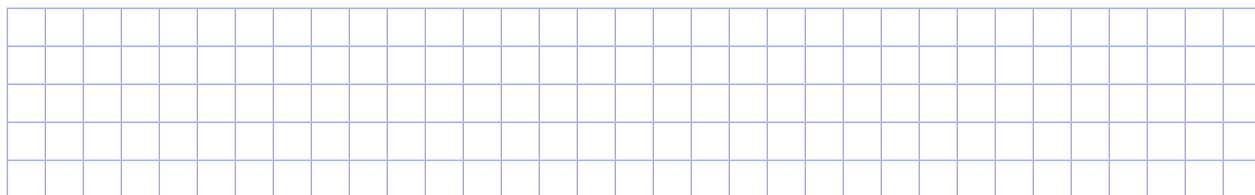
3) Нулями функції $y = \cos x$ є числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 0$.

Узагальнимо дані у вигляді таблиці:

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Примітка. Рівняння виду $\cos x = 0$, $\cos x = 1$ та $\cos x = -1$ зустрічаються дуже часто, тому хоча їх і можна розв'язати за допомогою універсальної формули $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а потім розв'язок спростити, однак для швидшого і раціональнішого розв'язання краще вивчити ці особливі випадки напам'ять.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 4x = 1$.



Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = 1$.

Розв'язання. Скористаємось парністю функції $y = \cos x$ і перепишемо дане рівняння у вигляді $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Тоді: $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

Відповідь. $\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Примітка. Якщо у рівнянні $\cos(kx + b) = a$, коефіцієнт k — від'ємний, то варто перетворити його на додатний, використовуючи парність функції $y = \cos x$.

IV. Обчислення значень арккосинусів чисел a

Означення. Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) називають кут α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), косинус якого дорівнює a , тобто $\cos \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса

1. Для $|a| \leq 1$ існує єдине значення арккосинуса.
2. Для $|a| > 1$ значень арккосинуса не існує, тобто вирази $\arccos 3$, $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\arccos \pi$, $\arccos(-4)$ не мають змісту.

3. Якщо $|a| \leq 1$, то $\cos(\arccos a) = a$.
4. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
5. $\arccos(\cos x) = x$ якщо $0 \leq x \leq \pi$.

Приклад 3. Обчисліть: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi$, то $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) > 0$.

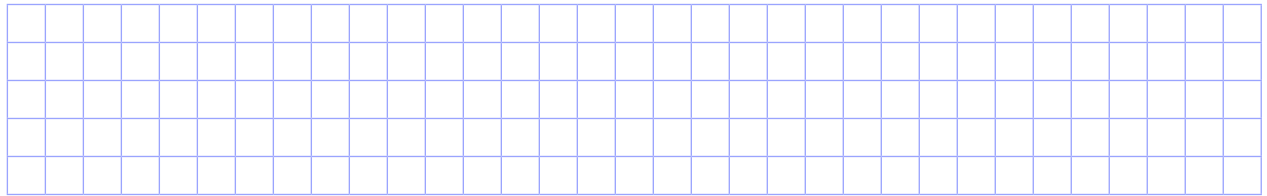
Нехай $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді за означенням арккосинуса $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Знайдемо $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Отже, $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Приклад 4. Обчисліть $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$.



Примітка. Корисна тотожність: $\arccos(\cos x) = x$ якщо $0 \leq x \leq \pi$. Якщо ж $x \in [0; \pi]$, то можна скористатися періодичністю функції $y = \cos x$ і привести аргумент функції $y = \arccos(\cos x)$ у межі $0 \leq x \leq \pi$.

Приклад 5. Обчисліть $\arccos(\cos 4)$.

Розв'язання. Оскільки $4 > \pi$, то не можна відразу застосовувати формулу $\arccos(\cos x) = x$. Спочатку потрібно замінити $\cos 4$ на косинус числа, що належить відрізку $[0; \pi]$. Зауважимо, що $\pi < 4 < 2\pi$, звідки $-2\pi < -4 < -\pi$ і $0 < 2\pi - 4 < \pi$.

Оскільки $\cos(2\pi - 4) = \cos(-4) = \cos 4$, то за формулою $\arccos(\cos x) = x$ маємо $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4$.

Відповідь. $2\pi - 4$.

V. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$ із застосуванням загальної формули коренів

Запишемо загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

[illegible]

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

[illegible]

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На рейках стоїть платформа. Скейтбордист стрибає на неї під гострим кутом α до рейок, зі швидкістю $v = 6$ м/с. Від поштовху платформа починає рухатися зі швидкістю $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$, де $m = 75$ кг — маса скейтбордиста зі скейтом, а $M = 375$ кг — маса платформи. Під яким кутом α (у градусах) потрібно стрибати, щоб розігнати платформу до швидкості 0,5 м/с?

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\sqrt{\pi x - x^2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1;$

2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

$$3) 12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos \left(-\frac{1}{2} \right);$$

4) $4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

2. Обчисліть:

$$1) \arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$2) \arccos\left(\cos\frac{2}{3}\pi\right).$$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = 0$;

$$2) \cos \frac{x}{3} = 1;$$

3) $\cos 4x = -1$;

4) $\cos \frac{x}{6} = -1$.

4. Розв'язати рівняння:

$$1) \cos 3x = -\frac{1}{2};$$

2) $2\cos 7x = -1$;

$$3) \ 2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3};$$

$$4) \ 2\cos\frac{x}{4} = \sqrt{2}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos 3x = \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos 5x = \frac{\pi}{3}$; 4) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $2\cos\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$;
3) $2\cos\left(\frac{x}{5} + 2\right) - \sqrt{2} = 0$; 4) $2\cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\cos\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\sin\left(4\arccos\frac{1}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{13}{4}\pi\right)$.

4. Порівняйте числа:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ та $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;
3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\arccos 0$; 4) $\arccos(-1)$ та $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\cos\left(-\frac{x}{7} + \frac{2}{3}\right) = -1$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 0$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) = 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(-x) = \cos\frac{\pi}{3}$; 2) $\cos(-x) = \sin\frac{\pi}{2}$;
3) $2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

7. Чи може $\arccos a$ набувати значень:

1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{9\pi}{3}$;
5) $\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{3}$; 7) 4; 8) -1 ?

8. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

9. Розв'яжіть рівняння, за формулами пониження степеня:

1) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$.

- 10.** Знайдіть нулі функції $y = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1,5$.
- 11.** Знайдіть корені рівняння $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, що задовольняють умову $-\pi < x < 4\pi$.
- 12.** Знайдіть корені рівняння, які задовольняють заданій умові:
- 1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, x > \pi;$
- 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x > 0;$
- 3) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right];$
- 4) $\cos 3x = -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$

Рівень С

- 1.** Обчисліть:
1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; 5) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- 2.** Обчисліть:
1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.
- 3.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
- 4.** Розв'яжіть рівняння $\cos x \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} = 0$.
- 5.** За формулою суми косинусів розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.
- 6.** Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2 - |x|} = 0$.
- 7.** **Творче завдання.** Напишіть програму, яка графічно ілюструє обчислення арккосинуса.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....

- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Розв'язки рівнянь $\cos x = a$ на різних проміжках.
2. Вплив точності обчислення косинусів на результати розв'язування рівнянь.
3. Історичний розвиток поняття косинуса і перших задач на розв'язування тригонометричних рівнянь.
4. Використання рівняння $\cos x = a$ у геодезії та в картографії.
5. Рівняння $\cos x = a$ як основа для моделювання хвильових процесів.

