

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 2. Урок–практикум. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$

План уроку

1. Розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$.
2. Обчислення значень арккосинусів чисел a .
3. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$ із застосуванням загальної формули коренів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) У які моменти часу точка на ободі колеса знаходиться на певній висоті над землею?

2) У яких реальних задачах фізики, інженерії, географії виникає потреба розв'язувати рівняння $\cos x = a$?

3) У яких задачах геометрії та оптики може знадобитися рівняння $\cos x = a$?

4) Чи можна за допомогою косинуса знайти висоту гори, якщо відомо відстань від неї до спостерігача та кут, під яким видно гору?

5) Чи можуть для кутів трикутника за одного значення косинуса існувати два різні кути?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Перетворіть суму $\cos 4E + \cos 2E$ в добуток.

Відповідь. $2\cos 3x \cos x$.

2. Спростіть вираз $\sin^2 10x$, за формулою пониження степеня.

Відповідь. $\frac{1 - \cos 20x}{2}$.

3. Знайдіть значення виразу $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь. $\frac{5\pi}{6}$.

4. Знайдіть область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.

Відповідь. $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Перетворіть у добуток вираз $\sin x + \cos x$, за формулою суми косинусів.

Відповідь. $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На рейках стоїть платформа. Скейтбордист стрибає на неї під гострим кутом α до рейок, зі швидкістю $v = 6$ м/с. Від поштовху платформа починає рухатися зі швидкістю $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$, де $m = 75$ кг — маса скейтбордиста зі скейтом, а $M = 375$ кг — маса платформи. Під яким кутом α (у градусах) потрібно стрибати, щоб розігнати платформу до швидкості 0,5 м/с?

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\sqrt{\pi x - x^2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

III. Розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію $y = \cos x$.

1) Функція $y = \cos x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 1$.

2) Функція $y = \cos x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 у точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = -1$.

3) Нулями функції $y = \cos x$ є числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\cos x = 0$.

Узагальнимо дані у вигляді таблиці:

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Примітка. Рівняння виду $\cos x = 0$, $\cos x = 1$ та $\cos x = -1$ зустрічаються дуже часто, тому хоча їх і можна розв'язати за допомогою універсальної формули $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а потім розв'язок спростити, однак для швидшого і раціональнішого розв'язання краще вивчити ці особливі випадки напам'ять.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 4x = 1$.

Розв'язання. За формулою пониження степеня, рівняння $\sin^2 4x = 1$ рівносильне рівнянню $\frac{1 - \cos 8x}{2} = 1$ або $\cos 8x = -1$.

Тоді $8x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

Розв'язання. За формулою зведення, рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$ рівносильне рівнянню $\cos 2x = 0$.

Тоді $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = 1$.

Розв'язання. Скористаємось парністю функції $y = \cos x$ і перепишемо дане рівняння у вигляді $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Тоді: $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

Відповідь. $\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Примітка. Якщо у рівнянні $\cos(kx + b) = a$, коефіцієнт k — від'ємний, то варто перетворити його на додатний, використовуючи парність функції $y = \cos x$.

9. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 \frac{4}{16x^2 + 1} = 1$.

Розв'язання.
$$\begin{cases} \cos \frac{4}{16x^2 + 1} = 1, \\ \cos \frac{4}{16x^2 + 1} = -1; \end{cases} \begin{cases} \frac{4}{16x^2 + 1} = 2\pi n, \\ \frac{4}{16x^2 + 1} = \pi + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Об'єднаємо два рівняння сукупності: $\frac{4}{16x^2 + 1} = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x^2 = \frac{4 - \pi k}{16\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Останнє рівняння має розв'язки, за умови, якщо $\frac{4 - \pi k}{16\pi k} \geq 0$, тобто

$$0 < k \leq \frac{4}{\pi}, \quad \frac{4}{\pi} \approx 1,27.$$

Враховуючи, що $k \in \mathbb{Z}$, можливим є тільки випадок $k = 1$.

Тоді $x^2 = \frac{4 - \pi}{16\pi}$, $x = \pm \sqrt{\frac{4 - \pi}{16\pi}}$.

Відповідь. $\pm \sqrt{\frac{4 - \pi}{16\pi}}$.

IV. Обчислення значень арккосинусів чисел a

Означення. Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) називають кут α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), косинус якого дорівнює a , тобто $\cos \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса

1. Для $|a| \leq 1$ існує єдине значення арккосинуса.
2. Для $|a| > 1$ значень арккосинуса не існує, тобто вирази $\arccos 3$, $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\arccos \pi$, $\arccos(-4)$ не мають змісту.
3. Якщо $|a| \leq 1$, то $\cos(\arccos a) = a$.
4. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
5. $\arccos(\cos x) = x$ якщо $0 \leq x \leq \pi$.

Ілюстративні приклади

10. Обчисліть: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi$, то $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) > 0$.

Нехай $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді за означенням арккосинуса $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Знайдемо $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Отже, $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

11. Обчисліть $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо $\cos \frac{5\pi}{4}$:

$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тоді $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4}$.

12. Обчисліть $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо $\cos\frac{2\pi}{3}$:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

Примітка. Корисна тотожність: $\arccos(\cos x) = x$ якщо $0 \leq x \leq \pi$. Якщо ж $x \in [0; \pi]$, то можна скористатися періодичністю функції $y = \cos x$ і привести аргумент функції $y = \arccos(\cos x)$ у межі $0 \leq x \leq \pi$.

13*. Обчисліть $\arccos(\cos 4)$.

Розв'язання. Оскільки $4 > \pi$, то не можна відразу застосовувати формулу $\arccos(\cos x) = x$. Спочатку потрібно замінити $\cos 4$ на косинус числа, що належить відрізьку $[0; \pi]$. Зауважимо, що $\pi < 4 < 2\pi$, звідки $-2\pi < -4 < -\pi$ і $0 < 2\pi - 4 < \pi$.

Оскільки $\cos(2\pi - 4) = \cos(-4) = \cos 4$, то за формулою $\arccos(\cos x) = x$ маємо $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4$.

Відповідь. $2\pi - 4$.

V. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$ із застосуванням загальної формули коренів

Запишемо загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ілюстративні приклади

14. Розв'яжіть рівняння $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Розв'язання. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

15. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $4x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

16. Розв'яжіть рівняння $5\cos\left(2 - \frac{7\pi x}{4}\right) = -1$.

Розв'язання. Скористаємось парністю функції $y = \cos x$ і перепишемо дане рівняння:

$$5\cos\left(\frac{7\pi x}{4} - 2\right) = -1, \quad \cos\left(\frac{7\pi x}{4} - 2\right) = -\frac{1}{5}, \quad \frac{7\pi x}{4} - 2 = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{7\pi x}{4} = 2 \pm \left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 7\pi x = 8 \pm 4\left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right) + 8\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{8 \pm 4\left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right)}{7\pi} + \frac{8}{7}n.$$

Відповідь. $\frac{8 \pm 4\left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right)}{7\pi} + \frac{8}{7}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

17. Знайдіть корені рівняння $1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0$, якщо відомо, що $-20 < x < 50$.

Розв'язання. $1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0, \quad \cos\frac{\pi x}{15} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\pi x}{15} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$\frac{\pi x}{15} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm 10 + 30n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = 10 + 30n, \\ x = -10 + 30n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

1) $-20 < 10 + 30n < 50, \quad -30 < 30n < 40, \quad -1 < n < \frac{4}{3}.$

Цілі числа n , які задовольняють останню нерівність це 0 та 1, при цьому $x = 10$ та $x = 40$.

2) $-20 < -10 + 30n < 50, \quad -10 < 30n < 60, \quad -\frac{1}{3} < n < 2.$

Цілі числа n , які задовольняють останню нерівність це 0 та 1, при цьому $x = -10$ та $x = 20$.

Відповідь. $-10; 10; 20; 40$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На рейках стоїть платформа. Скейтбордист стрибає на неї під гострим кутом α до рейок, зі швидкістю $v = 6$ м/с. Від поштовху платформа починає рухатися зі швидкістю $u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha$, де $m = 75$ кг — маса скейтбордиста зі скейтом, а $M = 375$ кг — маса платформи. Під яким кутом α (у градусах) потрібно стрибати, щоб розігнати платформу до швидкості 0,5 м/с?

Розв'язання. За умовою, $u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha, \quad 0,5 = \frac{75}{75+375} \cdot 6 \cdot \cos\alpha,$

$$\cos\alpha = \frac{0,5 \cdot 450}{75 \cdot 6}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то кут під яким потрібно стрибати становить $\frac{\pi}{3}$ радіан або 60° .

Відповідь. 60° .

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos(\sqrt{\pi x - x^2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $\sqrt{\pi x - x^2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки лівої та правої частин отриманої рівності.

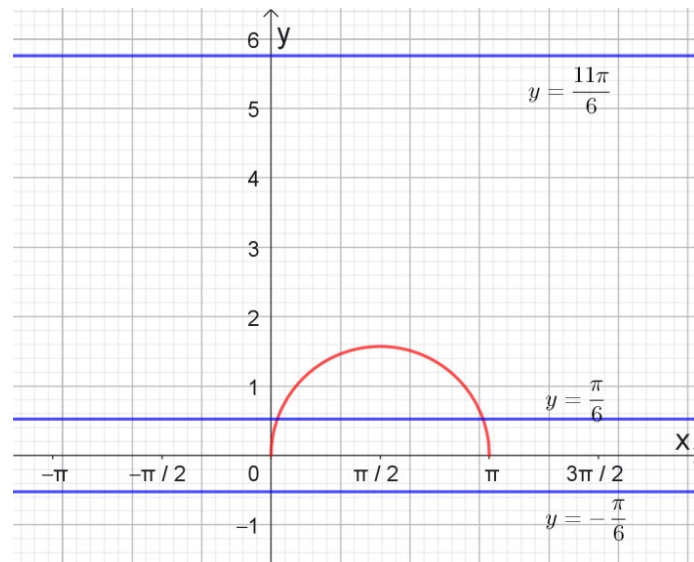
Графіком правої частини є сукупність прямих, паралельних осі Ox :

$$y = \pm \frac{\pi}{6}; y = \pm \frac{11\pi}{6}; y = \pm \frac{13\pi}{6}; \dots$$

Побудуємо графік функції $y = f(x) = \sqrt{\pi x - x^2}$.

Враховуючи обмеження $y \geq 0$, маємо: $y^2 = \pi x - x^2, \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$.

Графік — півколо з центром у точці $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ та з радіусом $\frac{\pi}{2}$, де $y \geq 0$.



Як бачимо, тільки одна пряма $y = \frac{\pi}{6}$ із сукупності прямих $y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, перетинає побудований графік. Тому всі розв'язки початкового рівняння є коренями рівняння $\sqrt{\pi x - x^2} = \frac{\pi}{6}$.

Звідки $x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{36} = 0, x = \frac{\pi}{6}(3 \pm 2\sqrt{2})$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}(3 \pm 2\sqrt{2})$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$;

2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

3) $12\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $\arccos\left(\cos \frac{2}{3}\pi\right)$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = 0$;

2) $\cos \frac{x}{3} = 1$;

3) $\cos 4x = -1$;

4) $\cos \frac{x}{6} = -1$.

4. Розв'язати рівняння:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;

2) $2\cos 7x = -1$;

3) $2\cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$;

4) $2\cos \frac{x}{4} = \sqrt{2}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{3}$;

2) $\cos 3x = \frac{\pi}{2}$;

3) $\cos 5x = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

2) $2\cos\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$;

3) $2\cos\left(\frac{x}{5} + 2\right) - \sqrt{2} = 0$;

4) $2\cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\cos\left(3\arccos \frac{1}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(2\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(4\arccos \frac{1}{2}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(3\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)$;

2) $\arccos\left(\cos \frac{13}{4}\pi\right)$.

4. Порівняйте числа:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ та $\arccos \frac{1}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\arccos 0$;

4) $\arccos(-1)$ та $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\cos\left(-\frac{x}{7} + \frac{2}{3}\right) = -1$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 0$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) = 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(-x) = \cos\frac{\pi}{3}$; 2) $\cos(-x) = \sin\frac{\pi}{2}$;
3) $2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

7. Чи може $\arccos a$ набувати значень:

1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{9\pi}{3}$;
5) $\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{3}$; 7) 4; 8) -1 ?

8. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

9. Розв'яжіть рівняння, за формулами пониження степеня:

1) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$.

10. Знайдіть нулі функції $y = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1,5$.

11. Знайдіть корені рівняння $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, що задовольняють умову $-\pi < x < 4\pi$.

12. Знайдіть корені рівняння, які задовольняють заданій умові:

1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, x > \pi$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x > 0$;
3) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$; 4) $\cos 3x = -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; 5) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\cos x \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} = 0$.

5. За формулою суми косинусів розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

6. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2-|x|} = 0$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка графічно ілюструє обчислення арккосинуса.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Розв'язки рівнянь $\cos x = a$ на різних проміжках.
2. Вплив точності обчислення косинусів на результати розв'язування рівнянь.
3. Історичний розвиток поняття косинуса і перших задач на розв'язування тригонометричних рівнянь.
4. Використання рівняння $\cos x = a$ у геодезії та в картографії.
5. Рівняння $\cos x = a$ як основа для моделювання хвильових процесів.