

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 20. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь методом розкладу на множники

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати тригонометричні рівняння методом розкладання на множники, використовуючи формули подвійного та потрійного аргументів;
- 2) розв’язувати тригонометричні рівняння методом розкладання на множники, використовуючи формули пониження степеня;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв’яжіть рівняння $\sin 3x = 0$.
2. Розв’яжіть рівняння $\cos \frac{x}{2} = 0$.
3. Спростіть вираз $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$.
4. Запишіть у вигляді добутку $\cos \alpha - \cos 7\alpha$.
5. За яких значень x функція $y = \operatorname{tg} 4x$ не існує?

III. Застосування формул подвійного та потрійного аргументів для розкладу рівняння на множники

При розв’язуванні рівнянь методом розкладання на множники алгебричних виразів, що утворюють тригонометричні рівняння, потрібно користуватися усіма можливими способами розкладання на множники алгебричних виразів: винесення за дужки

спільного множника, групування, використання тотожностей скороченого множення, а також використання тригонометричних тотожностей, які допомагають при розкладанні на множники.

Нагадаємо деякі тригонометричні тотожності.

1. Перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

2. Формули подвійного аргументу:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3. Формули половинного аргументу:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

4. Формули потрійного аргументу:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. $2\sin x \cos x + \cos x = 0$; $\cos x(2\sin x + 1) = 0$.

Добуток дорівнює 0 у випадку, якщо хоча б один із множників дорівнює 0.

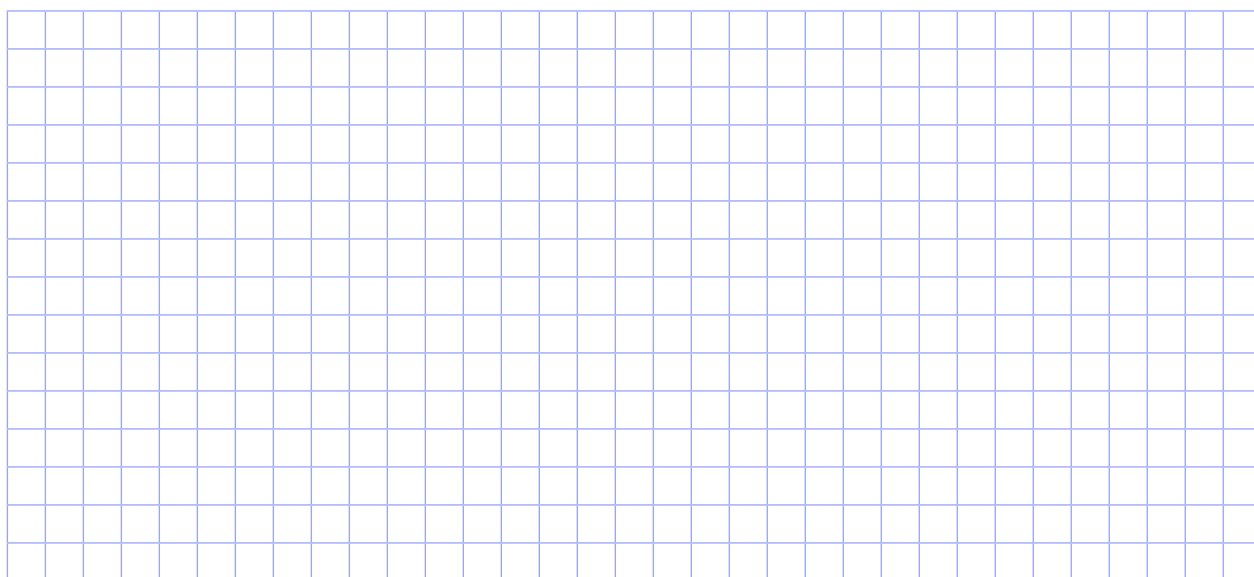
$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 2\sin x + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.



Приклад 3. Знайдіть усі корені рівняння $\sin 2x = \cos x$, що належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.



IV. Застосування формул пониження степеня щодо розкладу рівняння на множники

Нагадаємо деякі тригонометричні тотожності.

Формули пониження степеня

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \\ \sin^3 \alpha &= \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}, \\ \cos^3 \alpha &= \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$.

Розв'язання. $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2};$

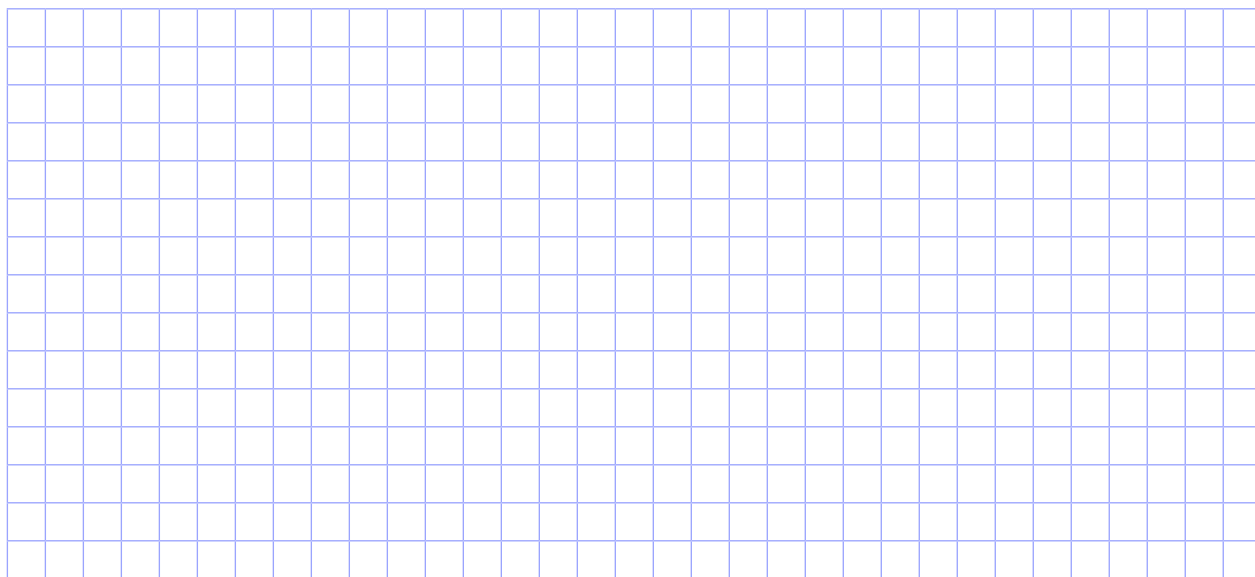
$$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}, \quad \cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0,$$

$$\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x = 0, \quad 2 \cos 4x \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0, & \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При грі на гітарі на двох струнах виникли два гармонічні коливання, які описуються рівняннями $f(t) = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ та $g(t) = 2 \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$, де t — час коливання (у секундах). Знайдіть, у які моменти часу ці два коливання компенсують (нівелюють) одне одного. Укажіть найменший додатний момент часу, коли відбудеться ця компенсація.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \cos 3x = 0$;

2) $\sin 5x - \sin x = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;

2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(3x + 45^\circ) + \cos 15^\circ = 0$;

2) $\sin(2x - 30^\circ) + \cos(2x + 30^\circ) = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

2) $\sin 5x + \cos 3x - \sin x = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$;

2) $\cos^2 \frac{3}{2}x = \frac{1}{4}$;

3) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1$;

4) $2\sin^2 x + \cos 4x = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,5$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 3\sin x$;

2) $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x - \sin 2x = 1$;

2) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x - \operatorname{ctg} x = 0$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3\operatorname{ctg} \frac{2\pi - x}{4}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$;

2) $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2\cos 2x$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$;

2) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x = 1 - \cos 2x$;

2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 6x + \cos 6x = 1 - 2\sin 3x$;

2) $4\sin x - 3\cos x = 8\sin^2 \frac{x}{2}$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$; 2) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x$;

2) $\cos^2 \frac{x}{5} + \cos^2 \frac{2x}{5} = \cos^2 \frac{3x}{5}$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$;

2) $3\sin \frac{x}{3} = \sin x$;

3) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$;

4) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x = \cos^2 3x$;

2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$;

2) $(\cos x - \sin x)^2 - 0,5\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0,25(1 - \sin 2x)$; 2) $(1 + \sin x)\cos x = \cos 2x \cos 3x$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 6x}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin x \sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0$;

2) $\cos^2 x - \sin x \cos 4x - \cos^2 4x = \frac{1}{4}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,5$; 2) $\cos^4 3x + \cos^4 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 3x - 0,5$;

2) $37\operatorname{tg} \frac{3}{2}x = 11\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

7. Творче завдання. Оберіть рівняння з параметром, яке можна розв'язати розкладанням на множники та запрограмуйте алгоритм його розв'язання.

Рефлексія

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідження тригонометричних рівнянь з параметрами, які зручно розв'язувати методом розкладання на множники.
- 2.** Застосування тригонометричних рівнянь, які розв'язуються методом розкладання на множники, до гармонічних коливань.
- 3.** Дослідження кількості розв'язків тригонометричних рівнянь на заданому проміжку.
- 4.** Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники у задачах фізики.
- 5.** Застосування методу розкладання рівняння на множники до тригонометричних рівнянь, які містять степені.







