

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 20. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь методом розкладу на множники

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Застосування формул подвійного та потрійного аргументів для розкладу рівняння на множники.
2. Застосування формул пониження степеня для розкладу рівняння на множники.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування [12 МАО 4.3.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв’язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому метод розкладання рівняння на множники є універсальним методом для розв'язування не тільки алгебричних, але й тригонометричних рівнянь?

2) Чи є метод розкладання на множники універсальним?

3) Як розклад тригонометричного виразу на множники пов'язаний із «нулями функції» та, яким чином це допомагає знаходити розв'язки рівняння?

4) Як ви вважаєте, чи можна автоматизувати за допомогою комп'ютерної програми розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладу на множники? З якими труднощами може зіткнутися програміст?

5) Чи допоможе знання тригонометричних тотожностей при розв'язуванні тригонометричних рівнянь методом розкладання їх на множники?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = 0$.

Відповідь. $\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{2} = 0$.

Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Спростіть вираз $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$.

Відповідь. $\sin 4\alpha$.

4. Запишіть у вигляді добутку $\cos \alpha - \cos 7\alpha$.

Відповідь. $2 \sin 4\alpha \sin 3\alpha$.

5. За яких значень x функція $y = \operatorname{tg} 4x$ не існує?

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При грі на гітарі на двох струнах виникли два гармонічні коливання, які описуються рівняннями $f(t) = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ та $g(t) = 2 \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$, де t — час коливання (у секундах). Знайдіть, у які моменти часу ці два коливання компенсують (нівелюють) одне одного. Укажіть найменший додатний момент часу, коли відбудеться ця компенсація.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

III. Застосування формул подвійного та потрійного аргументів для розкладу рівняння на множники

При розв'язуванні рівнянь методом розкладання на множники алгебричних виразів, що утворюють тригонометричні рівняння, потрібно користуватися усіма можливими способами розкладання на множники алгебричних виразів: винесення за дужки спільного множника, групування, використання тотожностей скороченого множення, а також використання тригонометричних тотожностей, які допомагають при розкладанні на множники.

Нагадаємо деякі тригонометричні тотожності.

1. Перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

2. Формули подвійного аргументу:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

3. Формули половинного аргументу:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.\end{aligned}$$

4. Формули потрійного аргументу:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x, \\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. $2\sin x \cos x + \cos x = 0$; $\cos x(2\sin x + 1) = 0$.

Добуток дорівнює 0 у випадку, якщо хоча б один із множників дорівнює 0.

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 2\sin x + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Розв'язання. $1 + \cos 2x + \sin 2x + \sin x + \cos x = 0$,

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = 0, \quad 2\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0, \\ (2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Добуток дорівнює 0 у випадку, якщо хоча б один із множників дорівнює 0.

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = -\cos x, \end{cases} \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = -1, \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

$$\text{Розв'язання. } 2\sin x \cos x - \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0, \quad \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$

Розв'язання. $\frac{\cos t}{\sin t} - \sin t = 1 - \cos t, \sin t \neq 0,$

$$\cos t - \sin^2 t = \sin t - \sin t \cos t, (\cos t + \sin t \cos t) - (\sin^2 t + \sin t) = 0,$$

$$\cos t(1 + \sin t) - \sin t(1 + \sin t) = 0, (1 + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin t = -1, \\ \sin t = \cos t; \end{cases} \begin{cases} \sin t = -1, \\ \operatorname{ctg} t = 1; \end{cases} \begin{cases} t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

10. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + 3 \sin 2x = 3 \sin x.$

Розв'язання. $3 \sin x - 4 \sin^3 x + 6 \sin x \cos x = 3 \sin x, 2 \sin x (2 \sin^2 x - 3 \cos x) = 0,$

$$2 \sin x (2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x) = 0, 2 \sin x (2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}.$

11. Знайдіть усі корені рівняння $\sin 2x = \cos x$, що належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у такому вигляді $\cos x(2 \sin x - 1) = 0.$

Звідки маємо, що $\cos x = 0$ або $\sin x = \frac{1}{2}.$

1) Якщо $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Виберемо корені, що належать проміжку, заданому в умові.

Якщо $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$

Якщо $n = 1$, то $x = \frac{3\pi}{2}$, но $\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$

Якщо $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$

Якщо $n = -2$, то $x = -\frac{3\pi}{2}$, но $-\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$

2) Якщо $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ або $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ або $x = \frac{5\pi}{6}$, проте $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Якщо $n = 1$, то для першої множини розв'язків $x = \frac{13\pi}{6}$, проте $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Якщо $n = -1$, то $x = -\frac{11\pi}{6}$, але $-\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ або $x = -\frac{7\pi}{6}$, але $-\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$.

IV. Застосування формул пониження степеня щодо розкладу рівняння на множники

Нагадаємо деякі тригонометричні тотожності.

Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4},$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

Ілюстративні приклади

12. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$.

Розв'язання. $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2};$

$$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}, \quad \cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0,$$

$$\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x = 0, \quad 2 \cos 4x \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0, \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

13. Розв'яжіть рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

Розв'язання. $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \cos 4x,$

$$\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \cos 4x,$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4\cos 4x, \quad 2 + (1 + \cos 4x) = 4\cos 4x, \quad \cos 4x = 1,$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

14. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$, що належать відрізьку $[1; 2]$.

Розв'язання. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1, \quad \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1,$

$$\cos 4x + \cos 6x = 0, \quad 2\cos 5x \cos x = 0,$$

$$\begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Якщо $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, то розглянемо подвійну нерівність:

$$1 \leq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \leq 2, \quad 10 \leq \pi + 2\pi k \leq 20, \quad 10 - \pi \leq 2\pi k \leq 20 - \pi, \quad \frac{10 - \pi}{2\pi} \leq k \leq \frac{20 - \pi}{2\pi},$$

$$\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Оскільки $\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{3,2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{16}, \quad \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$ і $k \in \mathbb{Z}$, то $k = 2$.

Звідки $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}.$

15. Розв'яжіть рівняння $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Розв'язання. $\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4},$

$$(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + 3(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) = \sqrt{2},$$

$$\cos 6x + 3\cos 2x = \sqrt{2}, \quad 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 3\cos 2x = \sqrt{2},$$

$$\cos^3 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При грі на гітарі на двох струнах виникли два гармонічні коливання, які описуються рівняннями $f(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ та $g(t) = 2\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$, де t — час коливання (у секундах). Знайдіть, у які моменти часу ці два коливання компенсують (нівелюють) одне одного. Укажіть найменший додатний момент часу, коли відбудеться ця компенсація.

Розв'язання. Якщо два коливання компенсують одне одного, то їхня сума в цей момент часу дорівнює нулю.

$$\begin{aligned}\text{Тоді: } 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) &= 0, \quad 4\cos\frac{3t + \frac{\pi}{6} + 5t + \frac{\pi}{3}}{2} \cdot \cos\frac{3t + \frac{\pi}{6} - 5t - \frac{\pi}{3}}{2} = 0, \\ 4\cos\frac{8t + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{-2t - \frac{\pi}{6}}{2} &= 0, \quad 4\cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{12}\right) = 0.\end{aligned}$$

Прирівнюємо кожен із множників до 0 й використовуємо особливий випадок, коли косинус дорівнює 0.

$$\begin{cases} 4t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ t + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4t = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ t = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, \\ t = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Якщо $n < 0$, то $t < 0$. Якщо $n \geq 0$, то найменше значення t дорівнює $\frac{\pi}{16}$ секунд при $n = 0$.

Відповідь. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Найменше значення t дорівнює $\frac{\pi}{16}$ с.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Розв'язання. Оскільки областю допустимих значень змінної даного рівняння є множина $[-1; 1]$, то доцільно зробити заміну $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$.

$$\text{Тоді } \sqrt{1 - \cos^2 t} = 4\cos^3 t - 3\cos t, \quad |\sin t| = \cos 3t.$$

Оскільки $t \in [0; \pi]$, то $\sin t \geq 0$ і $|\sin t| = \sin t$.

$$\text{Тоді } \sin t = \cos 3t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \cos 3t = 0, \quad -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = 0 \quad \text{або} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0.$$

Перше рівняння має єдиний корінь на відрізку $0 \leq t \leq \pi$: $t = \frac{3\pi}{4}$.

Друге рівняння має два корені на відрізку $0 \leq t \leq \pi$: $t = \frac{\pi}{8}$ і $t = \frac{5\pi}{8}$.

Відповідно, початкове рівняння має три корені:

$$x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \cos 3x = 0;$

2) $\sin 5x - \sin x = 0.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - \cos 8x = \sin 4x;$

2) $1 + \cos 8x = \cos 4x.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(3x + 45^\circ) + \cos 15^\circ = 0;$

2) $\sin(2x - 30^\circ) + \cos(2x + 30^\circ) = 0.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0;$

2) $\sin 5x + \cos 3x - \sin x = 0.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{3}{4};$

2) $\cos^2 \frac{3}{2}x = \frac{1}{4};$

3) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1;$

4) $2\sin^2 x + \cos 4x = 0.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0;$

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,5.$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 3\sin x;$

2) $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x - \sin 2x = 1;$

2) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x - \operatorname{ctg} x = 0;$

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3\operatorname{ctg} \frac{2\pi - x}{4}.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x;$

2) $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2\cos 2x.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x;$

2) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2};$

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x.$

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x = 1 - \cos 2x$;

2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 6x + \cos 6x = 1 - 2\sin 3x$;

2) $4\sin x - 3\cos x = 8\sin^2 \frac{x}{2}$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;

2) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x$;

2) $\cos^2 \frac{x}{5} + \cos^2 \frac{2x}{5} = \cos^2 \frac{3x}{5}$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$;

2) $3\sin \frac{x}{3} = \sin x$;

3) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$;

4) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x = \cos^2 3x$;

2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$;

2) $(\cos x - \sin x)^2 - 0,5\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0,25(1 - \sin 2x)$;

2) $(1 + \sin x)\cos x = \cos 2x \cos 3x$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 6x}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin x \sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0$;

2) $\cos^2 x - \sin x \cos 4x - \cos^2 4x = \frac{1}{4}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,5$;

2) $\cos^4 3x + \cos^4 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 3x - 0,5$;

2) $37\operatorname{tg} \frac{3}{2}x = 11\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

7. *Творче завдання.* Оберіть рівняння з параметром, яке можна розв'язати розкладанням на множники та запрограмуйте алгоритм його розв'язання.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідження тригонометричних рівнянь з параметрами, які зручно розв'язувати методом розкладання на множники.
- 2.** Застосування тригонометричних рівнянь, які розв'язуються методом розкладання на множники, до гармонічних коливань.
- 3.** Дослідження кількості розв'язків тригонометричних рівнянь на заданому проміжку.
- 4.** Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники у задачах фізики.
- 5.** Застосування методу розкладання рівняння на множники до тригонометричних рівнянь, які містять степені.