

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 21. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь зведенням їх до алгебричних

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь як використовувати метод заміни змінних при розв’язуванні тригонометричних рівнянь.
- 2) дізнаєтесь як розв’язувати однорідні тригонометричні рівняння;
- 3) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв’яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
2. Розв’яжіть рівняння $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Спростіть вираз $\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$.
4. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.
5. Розв’яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 4$.

III. Використання методу заміни

Якщо розглянути тригонометричні рівняння на кшталт $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$, $a \cos^3 x + b \cos^2 x + c \cos x + d = 0$, $a \operatorname{tg}^5 3x + b \operatorname{tg} 3x + c = 0$, $a \operatorname{ctg}^4 2x + b \operatorname{ctg}^2 2x + c = 0$, то оче-

За тотожностями $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ можна зводити й деякі інші типи рівнянь до таких, які можна розв'язати за допомогою заміни змінних.

можна зводити й деякі інші типи рівнянь до таких, які можна розв'язати за допомогою заміни змінних.

[illegible][illegible]

13

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin x - 2\cos x = 0$.

Розв'язання. $\sin x - 2\cos x = 0$.

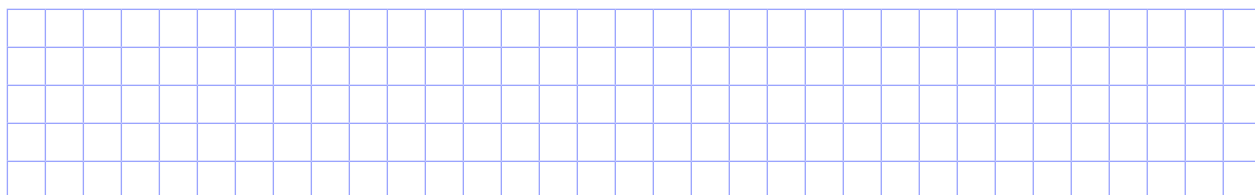
Якщо $\cos x = 0$, то дістанемо, що й $\sin x = 0$. Однак, одночасно $\cos x$ і $\sin x$ не можуть дорівнювати нулю, тому при $\cos x = 0$ — рівняння не має коренів.

Якщо $\cos x \neq 0$, то поділимо обидві частини рівняння на $\cos x$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$\operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = 2, \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–9 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Монтажник установлює кріплення для прямокутної панелі. Йому потрібно знайти кут між діагоналлю панелі та її більшою стороною, якщо за даними кресленнями периметр панелі у 2,5 рази більший за її діагональ. Допоможіть монтажнику з пошуком зазначеного кута. Для знаходження наближеного значення кута використовуйте тригонометричні таблиці або калькулятор. Відповідь запишіть з точністю до сотих.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $2\operatorname{ctg}^4 3x - 3\operatorname{ctg}^2 3x + 1 = 0$;

4) $\cos^2 2x + \cos 2x - 6 = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;

2) $3\operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$;

3) $\sin x + 2\cos^2 x = 1$;

4) $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + 2\sin x = 2$;

2) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cos^2 x - 5\sin^2 x - \sin 2x = 0$;

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

2) $6\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin 2x - 5\cos^2 x = 2$;

4) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 6 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $\cos 4t - 7\cos 2t + 4 = 0$;

2) $\cos x - 3\sin x = 0$;

4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 2 = 0$;

3) $10\operatorname{ctg}^2 x + 11\operatorname{ctg} x - 6 = 0$;

2) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$;

4) $18\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x - 10 = 0$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^2 x + \cos x - 3\frac{1}{2} = 0$;

3) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$;

2) $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$;

4) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$;

3) $\cos 4x + 1,5 = 4\sin^2 x$;

2) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$.

4) $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos 2x = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

3) $7\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 9\cos^2 \frac{x}{2} = 0$;

2) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\sin x \cos x$;

4) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $6\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$;

3) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2$;

2) $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$;

4) $3\sin 2x + \cos 2x - 4\cos^2 x = 1$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$;

2) $\sin(x - 90^\circ) + \sin(x - 180^\circ) = 0,5$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + 2\sin x = 2$;

3) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.

2) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

4) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$;

3) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$;

2) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$;

4) $4(1 + \cos x) = 3\sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

2) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\sin x \cos x$;

3) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x = 1$;

4) $\frac{2\sin^2 x + 3\cos x \sin x}{2\sin x \cos x - \cos^2 x} = 4$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.

2) $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - \cos 2x + 6\sin^2\left(\frac{41\pi}{2} + x\right) = 4\sin 2x$;

2) $2\sin^4 x + 1,25\sin^2 x - \cos^4 x = \cos 2x$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

2) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 2x - 6\sin^2 2x = -\frac{71}{16}$;

2) $2\operatorname{tg}^4 3x - \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 3x} + 1 = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x - 2\sin^2 x = 0$;

2) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

2) $\operatorname{tg}^2 x - 374\operatorname{tg} x - 374 = 2\sin 70^\circ \cos 20^\circ - \sin 50^\circ$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x = 0$;

2) $\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin x \cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cos^4 x - 2\cos^3 x - 4\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x - 4 = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1 - 2\sin 4x} + \sqrt{6}\cos 2x = 0$;

2) $\sqrt{3}\sin t - \sqrt{2\sin^2 t - \sin 2t + 3\cos^2 t} = 0$.

7. Творче завдання. Дослідіть як «Штучний інтелект» різних розробників розв'язує тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебричних та проаналізуйте спільні й відмінні риси між розв'язками ШІ та людини.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
- 2) Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
- 3) Для мене було найцікавішим
.....
.....
- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Метод заміни змінних у тригонометричних рівняннях, що виникають у задачах фізики.
- 2.** Використання тригонометричних рівнянь для визначення геометричних властивостей будівельних споруд.
- 3.** Метод заміни як інструмент спрощення складних рівнянь.
- 4.** Геометричний зміст однорідних тригонометричних рівнянь: кут між векторами.
- 5.** Використання однорідних рівнянь у задачах на рівновагу сил.







