

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 21. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь зведенням їх до алгебричних

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Використання методу заміни.
2. Застосування однорідності при розв’язанні тригонометричних рівнянь

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їхню достатність і взаємозв’язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв’язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна розв'язувати тригонометричні рівняння за допомогою квадратних чи дробово-раціональних рівнянь?

2) Чи будь-яке тригонометричне рівняння можна звести до алгебричного?

3) Що спільного між тригонометричними рівняннями і тригонометричними виразами? В чому їхня принципова відмінність?

4) Коли тригонометричні рівняння простіше розв'язувати без заміни змінної?

5) Чим принципово відрізняються рівняння $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ та $\sin^2 x + \cos x = 1$?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $\pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Спростіть вираз $\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$.

Відповідь. $2\cos 3\alpha$.

4. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.

Відповідь. -1.

5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 4$.

Відповідь. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Монтажник установлює кріплення для прямокутної панелі. Йому потрібно знайти кут між діагоналлю панелі та її більшою стороною, якщо за даними кресленнями периметр панелі у 2,5 рази більший за її діагональ. Допоможіть монтажнику з пошуком зазначеного кута. Для знаходження наближеного значення кута використовуйте тригонометричні таблиці або калькулятор. Відповідь запишіть з точністю до сотих.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

III. Використання методу заміни

Якщо розглянути тригонометричні рівняння на кшталт $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$, $a \cos^3 x + b \cos^2 x + c \cos x + d = 0$, $a \operatorname{tg}^5 3x + b \operatorname{tg} 3x + c = 0$, $a \operatorname{ctg}^4 2x + b \operatorname{ctg}^2 2x + c = 0$, то очевидно, що скориставшись заміною $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} 3x = t$, $\operatorname{ctg} 2x = t$ їх можна звести до алгебричних рівнянь $at^2 + bt + c = 0$, $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, $at^5 + bt + c = 0$, $at^4 + bt^2 + c = 0$, розв'язавши які, отримаємо тригонометричні рівняння найпростішого вигляду.

За тотожностями $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

можна зводити й деякі інші типи рівнянь до таких, які можна розв'язати за допомогою заміни змінних.

Розглянемо декілька прикладів.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 - 5t + 2 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$,

$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5+3}{4} = 2. \text{ Повернемося до заміни:}$$

1) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin x = 2$. Рівняння розв'язків немає.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$.

Розв'язання. $2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0$, $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$,

Нехай $\cos x = t$, тоді $2t^2 + 7t + 3 = 0$,

$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25,$$

$$t_1 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{-7-5}{4} = -3.$$

Повернемось до заміни:

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = -3$. Рівняння розв'язків немає.

Відповідь. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

Розв'язання. $1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2$, $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$,

Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 - 3t + 1 = 0$,

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1,$$

$$t_1 = \frac{3+1}{4} = 1, \quad t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Повернемось до заміни:

1) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{tg}^2 x = t$, тоді $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{t}$.

$$t + \frac{1}{t} = 2, \text{ звідки } t = 1.$$

Повернемось до заміни $\operatorname{tg}^2 x = 1$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

IV. Застосування однорідності при розв'язанні тригонометричних рівнянь

Означення. Рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають **однорідним** тригонометричним рівнянням n -го степеня відносно $\sin x$ й $\cos x$.

Сума показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$, для усіх доданків однорідного рівняння є величиною сталою. Це дає можливість ефективно розв'язувати рівняння даного типу. Розглянемо приклади.

Ілюстративні приклади

- 10.** Розв'яжіть рівняння $\sin x - 2\cos x = 0$.

Розв'язання. $\sin x - 2\cos x = 0$.

Якщо $\cos x = 0$, то дістанемо, що й $\sin x = 0$. Однак, одночасно $\cos x$ і $\sin x$ не можуть дорівнювати нулю, тому при $\cos x = 0$ — рівняння не має коренів.

Якщо $\cos x \neq 0$, то поділимо обидві частини рівняння на $\cos x$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$\operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = 2, \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

- 11.** Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо одиницю, як $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0, \quad \sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

Якщо $\cos x = 0$, то дістанемо, що й $\sin x = 0$. Однак, одночасно $\cos x$ і $\sin x$ не можуть дорівнювати нулю, тому, якщо $\cos x = 0$, то рівняння не має коренів.

Якщо $\cos x \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівняння, рівносильне даному: $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = 2; & \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

- 12.** Розв'яжіть рівняння $5\cos x + 12\sin x = 13$.

Розв'язання. Зведемо рівняння до однорідного рівняння другого степеня:

$$5\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) + 24 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 13\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

$$18\sin^2 \frac{x}{2} - 24 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 8\cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Якщо $\cos \frac{x}{2} = 0$, то отримаємо, що $\sin \frac{x}{2} = 0$. Але одночасно $\cos \frac{x}{2}$ і $\sin \frac{x}{2}$ не можуть

дорівнювати нулю, тому при $\cos \frac{x}{2} = 0$ дане рівняння не має коренів.

Якщо $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 \frac{x}{2}$, отримаємо рівняння, рівносильне даному: $18 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 24 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 8 = 0$ або $9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 12 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 = 0$,

$$\left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\right)^2 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

13. Розв'яжіть рівняння $\sin x + 2 \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Рівняння неоднорідне, але зводиться до нього. Використаємо тригонометричну одиницю, помноживши на неї суму перших двох доданків лівої частини рівняння. Це дає можливість звести дане рівняння до однорідного рівняння третього степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

$$\text{Матимемо } (\sin x + 2 \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos^2 x = 0,$$

$$\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0.$$

Оскільки $\sin x$ і $\cos x$ одночасно не дорівнюють нулю, то поділимо обидві частини останнього рівняння на $\cos^3 x$:

$$\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

$$\text{Нехай } \operatorname{tg} x = y, \text{ тоді } y^3 + 2y^2 + 3y + 2 = 0, \quad (y^3 + y^2) + (y^2 + y) + (2y + 2) = 0,$$

$$(y+1)(y^2 + y + 2) = 0.$$

$$\begin{cases} y+1=0, \\ y^2 + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $y^2 + y + 2$ дійсних коренів немає, тому $y = -1$.

$$\text{Повернемося до заміни: } \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

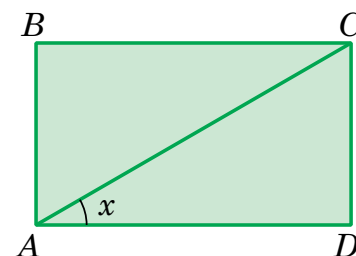
V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–9 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Монтажник установлює кріплення для прямокутної панелі. Йому потрібно знайти кут між діагоналлю панелі та її більшою стороною, якщо за даними кресленнями периметр панелі у 2,5 рази більший за її діагональ. Допоможіть монтажнику з пошуком зазначеного кута. Для знаходження наближеного значення кута використайте тригонометричні таблиці або калькулятор. Відповідь запишіть з точністю до сотих.

Розв'язання. На рисунку зобразимо креслення панелі у вигляді прямокутника $ABCD$ з більшою стороною AD .

Нехай $AC = d$, тоді $AD = d \cos x$, $CD = d \sin x$.



Тоді $P_{ABCD} = 2d(\cos x + \sin x)$, $\cos x + \sin x = \frac{P_{ABCD}}{2d}$, $\cos x + \sin x = \frac{5}{4}$,

оскільки $P_{ABCD} = \frac{5}{2}d$, тому $\frac{P_{ABCD}}{2d} = \frac{2,5d}{2d} = \frac{5}{4}$, $4\cos x + 4\sin x = 5$.

Запишемо формули косинуса й синуса подвійного кута, а також помножимо 5 на тригонометричну одиницю:

$$4\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) + 8\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 5\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

$$9\sin^2 \frac{x}{2} - 8\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Якщо $\cos \frac{x}{2} = 0$, то отримаємо, що $\sin \frac{x}{2} = 0$. Але одночасно $\cos \frac{x}{2}$ і $\sin \frac{x}{2}$ не можуть дорівнювати нулю, тому при $\cos \frac{x}{2} = 0$ рівняння не має коренів.

Якщо $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 \frac{x}{2}$, маємо рівнян-

ня, рівносильне даному: $9\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 8\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$.

Нехай $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тоді $9t^2 - 8t + 1 = 0$.

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 64 - 36 = 28,$$

$$t_1 = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{18} \approx 0,74, \quad t_2 = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{18} \approx 0,15.$$

Повернемося до заміни:

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,74, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 0,74 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{x}{2} = 36,5^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 73^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки ми шукаємо кут, протилежний меншому катету прямокутного трикутника, який має бути менший від 45° , то жодне значення кута не задовольняє умову задачі.

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,15, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 0,15 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{x}{2} = 8,5^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 17^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Кут 17° задовольняє умову задачі.

Відповідь. 17° .

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

$$\text{Розв'язання. } \sqrt{1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0,$$

$$\sqrt{\sin x + 2} = \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} + 1.$$

Нехай $\sin x = t$, причому з умови випливає, що $t \in [0; 1]$.

$$\text{Тоді } \sqrt{t+2} = \sqrt{\frac{t}{t+1}} + 1.$$

Оскільки $t \in [0; 1]$, то перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$\sqrt{(t+2)(t+1)} = \sqrt{t} + \sqrt{t+1}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$t^2 + 3t + 2 = t + 2\sqrt{t}\sqrt{t+1} + t + 1, \quad t^2 + t + 1 = 2\sqrt{t^2 + t}.$$

Нехай $t^2 + t = a$, тоді $a + 1 = 2\sqrt{a}$, $(\sqrt{a} - 1)^2 = 0$, $a = 1$.

$$t^2 + t = 1, \quad t^2 + t - 1 = 0, \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Умову $t \in [0; 1]$ задовольняє лише корінь $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Тоді } \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 3x - 3 \sin 3x + 2 = 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $2 \operatorname{ctg}^4 3x - 3 \operatorname{ctg}^2 3x + 1 = 0$;

4) $\cos^2 2x + \cos 2x - 6 = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$;

2) $3 \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$;

3) $\sin x + 2 \cos^2 x = 1$;

4) $\cos 2x + 3 \sin x = 2$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + 2 \sin x = 2$;

2) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x - \sin 2x = 0$;

2) $6 \sin^2 x - \frac{3}{2} \sin 2x - 5 \cos^2 x = 2$;

3) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

4) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 6 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$;

2) $\cos x - 3 \sin x = 0$;

3) $\cos 4t - 7 \cos 2t + 4 = 0$;

4) $2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + 2 = 0$;

2) $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

3) $10 \operatorname{ctg}^2 x + 11 \operatorname{ctg} x - 6 = 0$;

4) $18 \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{ctg} x - 10 = 0$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \sin^2 x + \cos x - 3 \frac{1}{2} = 0$;

2) $2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - 3 = 0$;

3) $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0$;

4) $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 2x + 6 \cos^2 2x = 1 \frac{9}{16}$;

2) $2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 3$.

3) $\cos 4x + 1,5 = 4 \sin^2 x$;

4) $2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos 2x = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

2) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \sin x \cos x$;

3) $7 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 9 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;

4) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos^2 x = 2$;

2) $\sin^2 x - \sin 2x = 3 \cos^2 x$;

3) $3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 2$;

4) $3 \sin 2x + \cos 2x - 4 \cos^2 x = 1$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$;

2) $\sin(x - 90^\circ) + \sin(x - 180^\circ) = 0,5$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + 2 \sin x = 2$;

2) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$.

3) $2 \cos^2 x + 4 \cos x = 3 \sin^2 x$.

4) $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 0$;

2) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$;

3) $2 \sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$;

4) $4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

2) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \sin x \cos x$;

3) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x = 1$;

4) $\frac{2 \sin^2 x + 3 \cos x \sin x}{2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = 4$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.

2) $\sin^2 x - \sin 2x = 3 \cos^2 x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 3$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - \cos 2x + 6 \sin^2 \left(\frac{41\pi}{2} + x \right) = 4 \sin 2x$;

2) $2 \sin^4 x + 1,25 \sin^2 x - \cos^4 x = \cos 2x$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

2) $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^4 2x - 6\sin^2 2x = -\frac{71}{16};$

2) $2\operatorname{tg}^4 3x - \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 3x} + 1 = 0.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x - 2\sin^2 x = 0;$

2) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}.$

2) $\operatorname{tg}^2 x - 374\operatorname{tg} x - 374 = 2\sin 70^\circ \cos 20^\circ - \sin 50^\circ.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x = 0;$

2) $\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin x \cos^3 x + 21\cos^4 x = 0.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cos^4 x - 2\cos^3 x - 4\cos^2 x + \cos x + 1 = 0;$

2) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x - 4 = 0.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1 - 2\sin 4x} + \sqrt{6} \cos 2x = 0;$

2) $\sqrt{3} \sin t - \sqrt{2\sin^2 t - \sin 2t + 3\cos^2 t} = 0.$

7. Творче завдання. Дослідіть як «Штучний інтелект» різних розробників розв'язує тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебричних та проаналізуйте спільні й відмінні риси між розв'язками ШІ та людини.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Метод заміни змінних у тригонометричних рівняннях, що виникають у задачах фізики.
- 2.** Використання тригонометричних рівнянь для визначення геометричних властивостей будівельних споруд.
- 3.** Метод заміни як інструмент спрощення складних рівнянь.
- 4.** Геометричний зміст однорідних тригонометричних рівнянь: кут між векторами.
- 5.** Використання однорідних рівнянь у задачах на рівновагу сил.