

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 22. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь різними методами

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати тригонометричні рівняння, які зводяться до однорідних;
- 2) розв’язувати тригонометричні рівняння за допомогою введення допоміжного кута;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$.
2. Обчисліть $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.
3. Розв’яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = 3$.
4. Спростіть вираз $\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3}$.
5. Обчисліть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

III. Метод зведення рівняння до однорідного

Нагадаємо, що рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають *однорідним* тригонометричним рівнянням n -го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Суми показників степенів $\sin x$ і $\cos x$ для всіх доданків однорідного рівняння є величиною сталою.

- 1.** Рівняння виду $a \sin x + b \cos x = 0$ (де $a, b \neq 0$) називається однорідним тригонометричним рівнянням першого степеня.

Такі однорідні рівняння розв'язують діленням обох частин на $\cos x$ (або на $\sin x$). Значення x , при яких $\cos x = 0$, не задовольняють дане рівняння, бо тоді і $\sin x$ також дорівнює нулю, а такого кута не існує. Тому можна поділити обидві частини рівняння на $\cos x$, не втративши при цьому розв'язків.

$$\text{Тобто } \frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = 0, \quad a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 2.** Рівняння виду $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ називається однорідним рівнянням другого степеня.

Якщо числа a, b, c не дорівнюють нулю, то для розв'язання такого рівняння обидві його частини ділять на $\cos^2 x$ (або на $\sin^2 x$) і отримують квадратне рівняння відносно тангенса (чи котангенса).

$$\text{Тобто } \frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Аналогічно розв'язують і однорідні рівняння вищих степенів.

Примітка. При розв'язуванні однорідних рівнянь не завжди можна ділити на $\cos^2 x$. Наприклад, якщо в рівнянні $a \cos^2 x + b \sin x \cos x = 0$ поділити обидві частини на $\cos^2 x$, то можна загубити серію розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні $\cos x$ може дорівнювати нулю, тому його треба розв'язувати методом розкладання на множники.

Часто тригонометричні рівняння, які не є однорідними, можна звести до однорідних «вирівнявши» показники степенів за допомогою тригонометричної одиниці, тобто формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

- Приклад 1.** Розв'яжіть рівняння $7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то дістанемо, що $\sin x = 0$. Але одночасно $\cos x$ і $\sin x$ не можуть дорівнювати нулю, тому при $\cos x = 0$ дане рівняння не має коренів.

Якщо $\cos x \neq 0$, то поділимо дане рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо:

$$7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

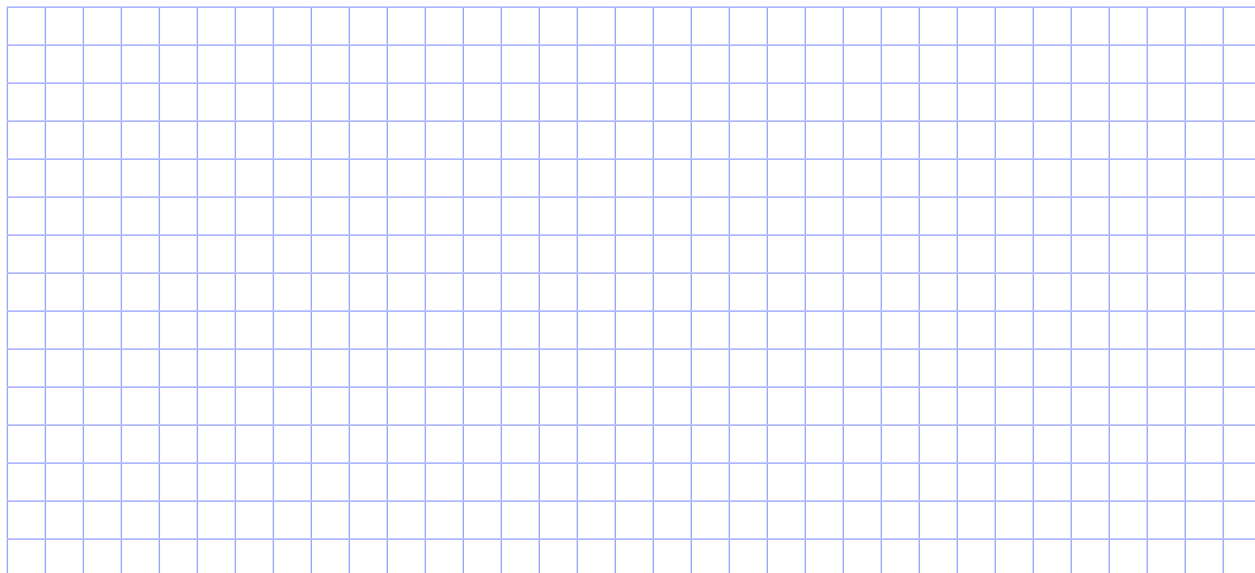
Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Тоді $7t^2 - 8t - 15 = 0$, звідси $t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{15}{7}$.

$$\text{Розв'язавши сукупність } \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}, \end{cases} \text{ отримаємо:}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad x = \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 2 = 0$.



IV. Застосування методу введення допоміжного кута

Тригонометричні рівняння виду $a \sin x + b \cos x = c$, де a , b і c — числа, відмінні від нуля, можна розв'язувати за допомогою введення допоміжного кута.

Поділимо обидві частини рівняння $a \sin x + b \cos x = c$ на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то існує значення φ таке, що

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi.$$

Тоді $\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, звідки $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, тобто рівняння зводиться до рівняння найпростішого виду.

Також існує таке значення φ , що $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$.

Тоді $\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, звідки $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$:

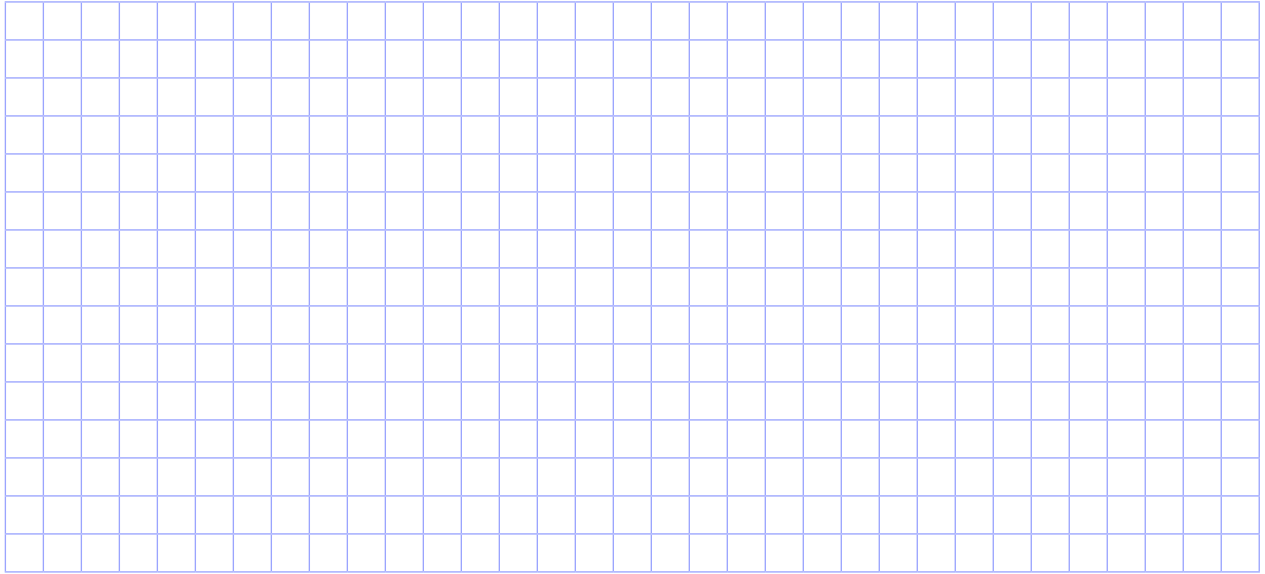
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1.$$

Оскільки $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, то:

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = 1, \quad \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1, \quad x - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $6 \sin x - 8 \cos x = 3$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Тіло ковзає вниз по похилій площині під дією сили тяжіння. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,5. Знайдіть кут нахилу похилої площини, якщо відомо, що прискорення руху тіла вдвічі менше від прискорення вільного падіння.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|--|
| 1) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$; | 2) $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$; |
| 3) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$; | 4) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$. |

2. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x + \cos x = 1$; | 2) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$; |
| 3) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; | 4) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$. |

3. Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin x - 2 \cos x = 0$; | 2) $\sin x + 5 \cos x = 0$; | 3) $2 \sin x - \cos x = 0$; |
| 4) $5 \sin x + \cos x = 0$; | 5) $2 \sin x - 3 \cos x = 0$; | 6) $5 \sin x + 3 \cos x = 0$. |

4. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $\sin x - \cos x = 0$; | 2) $5 \sin x + 6 \cos x = 0$; |
| 3) $3 \cos x + 4 \sin x = 6$; | 4) $3 \sin x + 4 \cos x = \frac{5}{\sqrt{2}}$. |

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$; 2) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin x + \cos x = 2$; 2) $2 \sin x - \cos x = 1$; 3) $3 \sin x + \cos x = 3$; 4) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} = 2$; 2) $8 \sin 3x - 15 \cos 3x = 1$;

3) $12 \cos \frac{x}{3} - 5 \sin \frac{x}{3} = 1$; 4) $24 \cos \frac{x}{2} + 7 \sin \frac{x}{2} = 5$.

2. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 2$.

3. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{3}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$; 2) $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2$;
3) $\sin 3x - \cos 3x = 0,5\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = -\sqrt{3}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = 3$; 2) $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$;
3) $2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 4$; 4) $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin 5x = 1$; 2) $3 \sin x + 2 \cos x = 1$;
3) $2 \sin x + 3 \cos x = 5$; 4) $2 \sin x - 3 \cos x = 4$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $9 \sin x + 4 \cos x = 1$; 2) $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$; 2) $3 \cos 2x + \sin^2 x + 5 \sin x \cos x = 0$;
3) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$; 4) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cos^2 x - \sin 2x = 0,5$; 2) $\sin 2x + 5 \sin^2 x = 1,5$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x - 6 \cos^3 x = 0$; 2) $\sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x + 6 \cos^3 x = 0$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^6 x + \cos^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$; 2) $2 \cos^2 x - 3 \sin 2x = 2 \sin \frac{3\pi}{2}$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $12 \cos 3x - 5 \sin 3x = 13 \sin x$; 2) $4 \sin 3x + 3 \cos 3x = 5,2$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння має корені:
1) $\sin x + a \cos x = 2$; 2) $\cos x + a \sin x = 2$.
- 2.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 1$;
2) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos^2 x + \cos x \sin^2 x = 1$.
- 3.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a$ не має коренів.
- 4.** При всіх значеннях параметра a розв'яжіть рівняння
 $(a^2 + 2)\sin^2 x + 4a \sin x \cos x = a^2 + 3$.
- 5.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$.
- 6.** Розв'яжіть рівняння:
1) $2 \cos 4x - \cos^3 x = 2 - 16 \cos^2 x$; 2) $4 \sin^2 x + \sin 4x + 2 \sin 2x \sin 4x = 2$.
- 7.** *Творче завдання.* Запрограмуйте алгоритм розв'язування одного з рівнянь з параметрами, що наведені у тренувальних вправах.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

[illegible]

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.

.

2)

.

.

.....

Можливі теми проєктів

1. Створення бібліотеки типових завдань на однорідні тригонометричні рівняння.
2. Використання однорідних тригонометричних рівнянь у фізиці коливань та хвиль.
3. Однорідні тригонометричні рівняння з параметрами.
4. Рівносильність отриманих розв'язків при розв'язуванні тригонометричних рівнянь методом введення допоміжного кута.
5. Складні заміни при розв'язуванні тригонометричних рівнянь.







