

## Тема 3.

# Тригонометричні рівняння й нерівності

### Урок 22. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь різними методами

**Тип уроку:** урок формування вмінь і навичок.

#### План уроку

1. Метод зведення рівняння до однорідного.
2. Застосування методу введення допоміжного кута.

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їхню достатність і взаємозв’язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв’язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв’язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв’язання практичних задач.

- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

## I. Організаційна частина (2 хв)

### Мотиваційні запитання

- 1) Чому деякі рівняння називають однорідними?
- 2) Чи помічали ви, що іноді рівняння різних типів мають однакові способи розв'язання?
- 3) Чи будь-яке однорідне тригонометричне рівняння  $n$ -го степеня можна розв'язати діленням обох частин рівняння на  $\cos^2 x$  чи  $\sin^2 x$ ?
- 4) Чи завжди рівняння  $a \sin x + b \cos x = c$  має розв'язки?
- 5) Як довести, що точка з координатами  $\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  обов'язково належить одиничному колу?

## II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз  $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$ .  
Відповідь. 1.
2. Обчисліть  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ .  
Відповідь.  $-\frac{\pi}{3}$ .
3. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg} x = 3$ .  
Відповідь.  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .
4. Спростіть вираз  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3}$ .  
Відповідь.  $\sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ .
5. Обчисліть  $\operatorname{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ .  
Відповідь.  $\frac{2\pi}{3}$ .

## Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Тіло ковзає вниз по похилій площині під дією сили тяжіння. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,5. Знайдіть кут нахилу похилої площини, якщо відомо, що прискорення руху тіла вдвічі менше від прискорення вільного падіння.

### III. Метод зведення рівняння до однорідного

Нагадаємо, що рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю,  $n \in \mathbb{N}$ , називають *однорідним* тригонометричним рівнянням  $n$ -го степеня відносно  $\sin x$  і  $\cos x$ .

Суми показників степенів  $\sin x$  і  $\cos x$  для всіх доданків однорідного рівняння є величиною сталою.

- 1.** Рівняння виду  $a \sin x + b \cos x = 0$  (де  $a, b \neq 0$ ) називається однорідним тригонометричним рівнянням першого степеня.

Такі однорідні рівняння розв'язують діленням обох частин на  $\cos x$  (або на  $\sin x$ ). Значення  $x$ , при яких  $\cos x = 0$ , не задовольняють дане рівняння, бо тоді і  $\sin x$  також дорівнює нулю, а такого кута не існує. Тому можна поділити обидві частини рівняння на  $\cos x$ , не втративши при цьому розв'язків.

$$\text{Тобто } \frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = 0, \quad a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 2.** Рівняння виду  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$  називається однорідним рівнянням другого степеня.

Якщо числа  $a, b, c$  не дорівнюють нулю, то для розв'язання такого рівняння обидві його частини ділять на  $\cos^2 x$  (або на  $\sin^2 x$ ) і отримують квадратне рівняння відносно тангенса (чи котангенса).

$$\text{Тобто } \frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Аналогічно розв'язують і однорідні рівняння вищих степенів.

**Примітка.** При розв'язуванні однорідних рівнянь не завжди можна ділити на  $\cos^2 x$ . Наприклад, якщо в рівнянні  $a \cos^2 x + b \sin x \cos x = 0$  поділити обидві частини на  $\cos^2 x$ , то можна загубити серію розв'язків  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ . Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні  $\cos x$  може дорівнювати нулю, тому його треба розв'язувати методом розкладання на множники.

Часто тригонометричні рівняння, які не є однорідними, можна звести до однорідних «вирівнявши» показники степенів за допомогою тригонометричної одиниці, тобто формули  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

## Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння  $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$ .

*Розв'язання.* Якщо  $\cos x = 0$ , то дістанемо, що  $\sin x = 0$ . Але одночасно  $\cos x$  і  $\sin x$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\cos x = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\cos x \neq 0$ , то поділимо дане рівняння на  $\cos^2 x$ , отримаємо:

$$7\tg^2 x - 8\tg x - 15 = 0.$$

Нехай  $\tg x = t$ . Тоді  $7t^2 - 8t - 15 = 0$ , звідси  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = \frac{15}{7}$ .

Розв'язавши сукупність 
$$\begin{cases} \tg x = -1, \\ \tg x = \frac{15}{7}, \end{cases}$$
 отримаємо:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad x = \arctg \frac{15}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \arctg \frac{15}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

7. Розв'яжіть рівняння  $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 2 = 0$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ , то перепишемо дане рівняння у вигляді:  $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$ ,

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Якщо  $\cos x = 0$ , то дістанемо, що  $\sin x = 0$ . Але одночасно  $\cos x$  і  $\sin x$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\cos x = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\cos x \neq 0$ , то поділимо дане рівняння на  $\cos^2 x$ , отримаємо:

$$3\tg^2 x + 2\tg x - 1 = 0. \quad \text{Замінімо } \tg x = t \text{ і розв'яжемо квадратне рівняння}$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0, \quad \text{корені якого } t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{3}.$$

Розв'язавши сукупність 
$$\begin{cases} \tg x = -1, \\ \tg x = \frac{1}{3}, \end{cases}$$
 отримаємо:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad x = \arctg \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \arctg \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

8. Розв'яжіть рівняння  $4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$ .

*Розв'язання.* Це рівняння не є однорідним.

Перепишемо його так:  $\sin x - \cos x = 4\sin^3 x$ .

Помножимо ліву частину рівняння на  $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ .

Після зведення подібних доданків маємо:

$$3\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0.$$

Якщо  $\cos x = 0$ , то дістанемо, що  $\sin x = 0$ . Але одночасно  $\cos x$  і  $\sin x$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\cos x = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\cos x \neq 0$ , то поділимо дане рівняння на  $\cos^3 x$ , отримаємо:

$$3\tg^3 x + \tg^2 x - \tg x + 1 = 0.$$

Нехай  $\tg x = t$ , тоді:  $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$ ,  $3t^3 + 3t^2 - 2t^2 - 2t + t + 1 = 0$ ,

$$3t^2(t+1) - 2t(t+1) + (t+1) = 0, \quad (t+1)(3t^2 - 2t + 1) = 0.$$

Оскільки рівняння  $3t^2 - 2t + 1 = 0$  не має дійсних коренів, то  $t = -1$ .

Таким чином,  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**9.** Розв'яжіть рівняння  $3\sin 2x + 4\cos 2x = 5$ .

*Розв'язання.*  $3\sin 2x + 4\cos 2x = 5$ ,

$$3 \cdot 2\sin x \cos x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$9\sin^2 x - 6\sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

Якщо  $\cos x = 0$ , то дістанемо, що  $\sin x = 0$ . Але одночасно  $\cos x$  і  $\sin x$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\cos x = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\cos x \neq 0$ , то поділимо дане рівняння на  $\cos^2 x$ , отримаємо:

$$9\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

$$(3\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## IV. Застосування методу введення допоміжного кута

Тригонометричні рівняння виду  $a\sin x + b\cos x = c$ , де  $a$ ,  $b$  і  $c$  — числа, відмінні від нуля, можна розв'язувати за допомогою введення допоміжного кута.

Поділимо обидві частини рівняння  $a\sin x + b\cos x = c$  на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ , то існує значення  $\varphi$  таке, що

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi.$$

Тоді  $\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , звідки  $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , тобто рівняння зводиться до рівняння найпростішого виду.

Також існує таке значення  $\varphi$ , що  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ ,  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$ .

Тоді  $\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , звідки  $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

### Ілюстративні приклади (5–7 хв)

**11.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$ .

*Розв'язання.* Поділимо обидві частини рівняння на  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1.$$

Оскільки  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ , а  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ , то:

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = 1, \quad \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = 1, \quad x - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь.  $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

**12.** Розв'яжіть рівняння  $6 \sin x - 8 \cos x = 3$ .

*Розв'язання.* Поділимо обидві частини рівняння на  $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ . Отримаємо

$$\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x = \frac{3}{10}.$$

Тоді  $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{4}{5}$ , тому рівняння можна подати так:

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{3}{10}, \quad \sin(x + \varphi) = \frac{3}{10}, \quad x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{3}{10} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{3}{10} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки  $\cos \varphi = \frac{3}{5} > 0$ ,  $\sin \varphi = -\frac{4}{5} < 0$ , то кут  $\varphi$  лежить у IV чверті, а тому

$$\varphi = \arcsin \left( -\frac{4}{5} \right) = -\arcsin \frac{4}{5}.$$

Відповідь.  $-\arcsin \frac{4}{5} + (-1)^n \arcsin \frac{3}{10} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

**13.** Розв'яжіть рівняння  $5 \cos x + 12 \sin x = 13$ .

*Розв'язання. I спосіб.* Поділимо обидві частини рівняння на  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ :

$$\frac{5}{13} \cos x + \frac{12}{13} \sin x = 1.$$

Оскільки  $\left( \frac{5}{13} \right)^2 + \left( \frac{12}{13} \right)^2 = 1$ , то існує таке значення  $\varphi$ , що  $\frac{12}{13} = \sin \varphi$ ,  $\frac{5}{13} = \cos \varphi$ , де

$\varphi$  — допоміжний кут такий, що  $\varphi = \arccos \frac{5}{13}$ .

Маємо:  $\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = 1$ ,  $\cos(x - \varphi) = 1$ ,  $x - \varphi = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$x = \varphi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \arccos \frac{5}{13} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*II спосіб.* Зведемо дане рівняння до однорідного рівняння другого степеня:

$$5 \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) + 24 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 13 \left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right),$$

$$18 \sin^2 \frac{x}{2} - 24 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Якщо  $\cos \frac{x}{2} = 0$ , то дістанемо, що  $\sin \frac{x}{2} = 0$ . Але одночасно  $\cos \frac{x}{2}$  і  $\sin \frac{x}{2}$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\cos \frac{x}{2} = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ , то поділимо обидві частини рівняння на  $\cos^2 \frac{x}{2}$  і отримаємо рівняння, рівносильне даному:  $18 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 24 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 8 = 0$  або  $9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 12 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 = 0$ ,

$$\left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\right)^2 = 0, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3}, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь.  $\arccos \frac{5}{13} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Примітка.** В рамках дослідницького проекту можете довести, що

$$\arccos \frac{5}{13} = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

## V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

### Як я вирішу певну проблему?

**Задача.** Тіло ковзає вниз по похилій площині під дією сили тяжіння. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,5. Знайдіть кут нахилу похилої площини, якщо відомо, що прискорення руху тіла вдвічі менше від прискорення вільного падіння.

**Розв'язання.** Введемо позначення:  $\vec{P}$  — вага тіла,  $\vec{N}$  — нормальна складова ваги,  $\vec{F}$  — сила, спрямована вздовж похилої площини,  $\vec{L}$  — сила тертя (див. рисунок).

Якщо  $x$  — шуканий кут  $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ , то неважко

знайти:  $N = P \cos x$ ,  $F = P \sin x$ ,  $L = 0,5N = 0,5P \cos x$ .

Рух тіла по похилій площині відбувається під дією сили  $f$ , де

$$f = F - L = P \sin x - 0,5P \cos x \text{ та } P = mg,$$

де  $m$  — маса тіла,  $g$  — прискорення вільного падіння.

З іншого боку, за законом Ньютона  $f = ma$ , де  $a$  — прискорення руху тіла.

Маємо рівняння  $mg(\sin x - 0,5 \cos x) = ma$ .

Врахуємо, що, за умовою,  $g = 2a$ .

Тоді рівняння можна переписати в такому вигляді:  $2 \sin x - \cos x = 1$ .

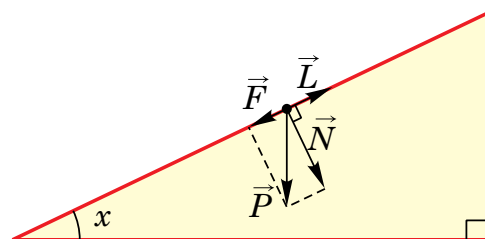
Зведемо дане рівняння до однорідного рівняння другого степеня:

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$



Якщо  $\sin \frac{x}{2} = 0$ , то дістанемо, що  $\cos \frac{x}{2} = 0$ . Але одночасно  $\cos \frac{x}{2}$  і  $\sin \frac{x}{2}$  не можуть дорівнювати нулю, тому при  $\sin \frac{x}{2} = 0$  дане рівняння не має коренів.

Якщо  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ , то поділимо обидві частини рівняння на  $\sin^2 \frac{x}{2}$ , отримаємо рівняння, рівносильне даному:  $2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = 0$  або  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \left( 2 - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) = 0$ .

$$\text{Тоді} \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2. \end{cases}$$

На проміжку  $\left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$  сукупність має лише один розв'язок  $x = 2 \operatorname{arccotg} 2 \approx 53^\circ$ .

Відповідь.  $\approx 53^\circ$ .

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

### Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

- |                                                      |                                                      |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$ ; | 2) $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ ; |
| 3) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ ;   | 4) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ . |

2. Розв'яжіть рівняння:

- |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x + \cos x = 1$ ;        | 2) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ ; |
| 3) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ; | 4) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ . |

3. Розв'яжіть рівняння:

- |                              |                                |                                |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin x - 2 \cos x = 0$ ; | 2) $\sin x + 5 \cos x = 0$ ;   | 3) $2 \sin x - \cos x = 0$ ;   |
| 4) $5 \sin x + \cos x = 0$ ; | 5) $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ ; | 6) $5 \sin x + 3 \cos x = 0$ . |

4. Розв'яжіть рівняння:

- |                                |                                                 |
|--------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1) $\sin x - \cos x = 0$ ;     | 2) $5 \sin x + 6 \cos x = 0$ ;                  |
| 3) $3 \cos x + 4 \sin x = 6$ ; | 4) $3 \sin x + 4 \cos x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ . |

5. Розв'яжіть рівняння:

- |                                                                                            |                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1) $\sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ ; | 2) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ . |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|

6. Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $2 \sin x + \cos x = 2$ ; 2)  $2 \sin x - \cos x = 1$ ; 3)  $3 \sin x + \cos x = 3$ ; 4)  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$ .

### Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

- |                                                    |                                   |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $4 \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} = 2$ ; | 2) $8 \sin 3x - 15 \cos 3x = 1$ ; |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------|

$$3) 12 \cos \frac{x}{3} - 5 \sin \frac{x}{3} = 1;$$

$$4) 24 \cos \frac{x}{2} + 7 \sin \frac{x}{2} = 5.$$

**2.** Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння  $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 2$ .

**3.** Знайдіть найменший додатний корінь рівняння  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{3}$ .

**4.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2;$$

$$2) \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2;$$

$$3) \sin 3x - \cos 3x = 0,5\sqrt{6};$$

$$4) \sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = -\sqrt{3}.$$

**5.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = 3;$$

$$2) 3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2;$$

$$3) 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 4;$$

$$4) 3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 1.$$

**6.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin 5x = 1;$$

$$2) 3 \sin x + 2 \cos x = 1;$$

$$3) 2 \sin x + 3 \cos x = 5;$$

$$4) 2 \sin x - 3 \cos x = 4.$$

**7.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 9 \sin x + 4 \cos x = 1;$$

$$2) \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

**8.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0;$$

$$2) 3 \cos 2x + \sin^2 x + 5 \sin x \cos x = 0;$$

$$3) \sin 2x + 2 \cos 2x = 1;$$

$$4) \cos 2x + 3 \sin 2x = 3.$$

**9.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3 \cos^2 x - \sin 2x = 0,5;$$

$$2) \sin 2x + 5 \sin^2 x = 1,5.$$

**10.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x - 6 \cos^3 x = 0;$$

$$2) \sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x + 6 \cos^3 x = 0.$$

**11.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^6 x + \cos^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16};$$

$$2) 2 \cos^2 x - 3 \sin 2x = 2 \sin \frac{3\pi}{2}.$$

**12.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 12 \cos 3x - 5 \sin 3x = 13 \sin x;$$

$$2) 4 \sin 3x + 3 \cos 3x = 5,2.$$

## Рівень С

**1.** Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має корені:

$$1) \sin x + a \cos x = 2;$$

$$2) \cos x + a \sin x = 2.$$

**2.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^3 x - \cos^3 x + \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 1;$$

$$2) \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos^2 x + \cos x \sin^2 x = 1.$$

**3.** Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a$  не має коренів.

**4.** При всіх значеннях параметра  $a$  розв'яжіть рівняння

$$(a^2 + 2) \sin^2 x + 4a \sin x \cos x = a^2 + 3.$$

5. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ .
6. Розв'яжіть рівняння:  
 1)  $2 \cos 4x - \cos^3 x = 2 - 16 \cos^2 x$ ;                      2)  $4 \sin^2 x + \sin 4x + 2 \sin 2x \sin 4x = 2$ .
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм розв'язування одного з рівнянь з параметрами, що наведені у тренувальних вправах.

## VII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

### Мої враження від уроку

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10     |
| Жахливі |   |   |   |   |   |   |   |   | Чудові |

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1) .....

.....

.....

2) .....

.....

.....

? .....

.....

.....

### Можливі теми проєктів

1. Створення бібліотеки типових завдань на однорідні тригонометричні рівняння.
2. Використання однорідних тригонометричних рівнянь у фізиці коливань та хвиль.
3. Однорідні тригонометричні рівняння з параметрами.
4. Рівносильність отриманих розв'язків при розв'язуванні тригонометричних рівнянь методом введення допоміжного кута.
5. Складні заміни при розв'язуванні тригонометричних рівнянь.