

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 23. Урок–практикум. Рівносильні перетворення при розв’язанні тригонометричних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) робити рівносильні переходи при розв’язуванні тригонометричних рівнянь, зокрема переходити від рівняння до рівносильної йому системи;
- 2) аналізувати множини розв’язків тригонометричних рівнянь та шляхом об’єднання чи перетину множин відбирати потрібні, за умовою розв’язки;
- 3) розрізняти тригонометричні тотожності, які призводять до звуження області визначення рівняння та запобігти втраті розв’язків при застосуванні цих тотожностей;
- 4) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв’яжіть рівняння $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$.
2. Розв’яжіть рівняння $(x - 2)\sqrt{x - 3} = 0$.
3. Спростіть вираз $\frac{\sin 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 128^\circ \sin 68^\circ}{\cos 44^\circ \cos 16^\circ - \sin 44^\circ \sin 16^\circ}$.
4. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{3} \sin^2 x - \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.
5. Спростіть вираз $\frac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha}$.

III. Перехід від рівнянь до рівносильних систем

При розв'язуванні рівнянь виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ виникають сторонні корені. Нагадаємо,

що таке рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$.

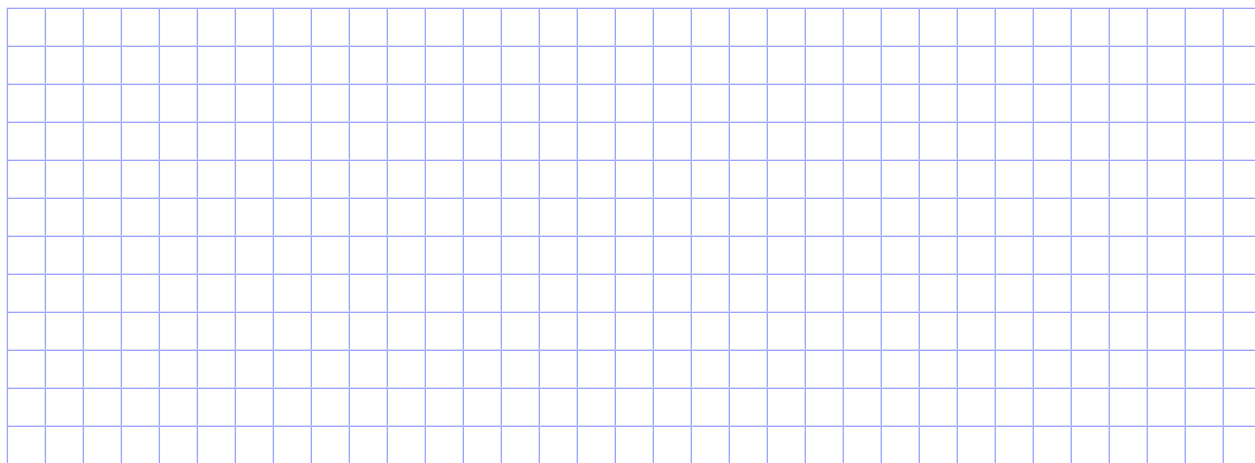
Розв'язання. $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0, \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \neq 1, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Далі зі співвідношення $\frac{\pi}{2} + \pi m \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ отримуємо $m \neq 2k$, але тоді $m = 2k + 1$

і $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.



IV. Аналіз множин розв'язків тригонометричних рівнянь

При відборі коренів у процесі розв'язування тригонометричних рівнянь використовують один із наведених способів.

1. Арифметичний спосіб:

- а) безпосередня підстановка отриманих коренів у рівняння та наявні обмеження;
- б) перебір значень цілочислового параметра і обчислення коренів.

2. Алгебричний спосіб:

- а) розв'язування нерівності відносно невідомого цілочислового параметра і обчислення коренів;
- б) дослідження рівняння з двома цілочисловими параметрами.

3. Геометричний спосіб:

- а) зображення коренів на тригонометричному колі з подальшим відбором з урахуванням наявних обмежень;
- б) зображення коренів на числовій прямій з подальшим відбором з урахуванням наявних обмежень.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos x \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 5x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

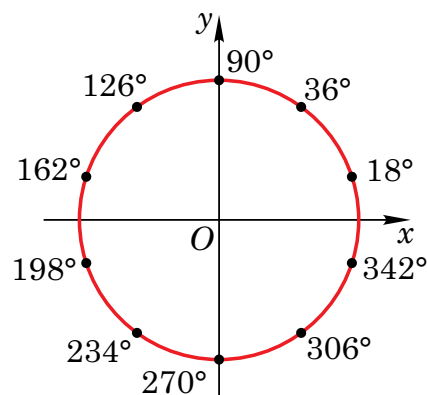
Розглянемо рівність $\frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Після перетворень отримуємо $n = 5k + 2$. Отже, друга множина розв'язків включає в себе першу множину.

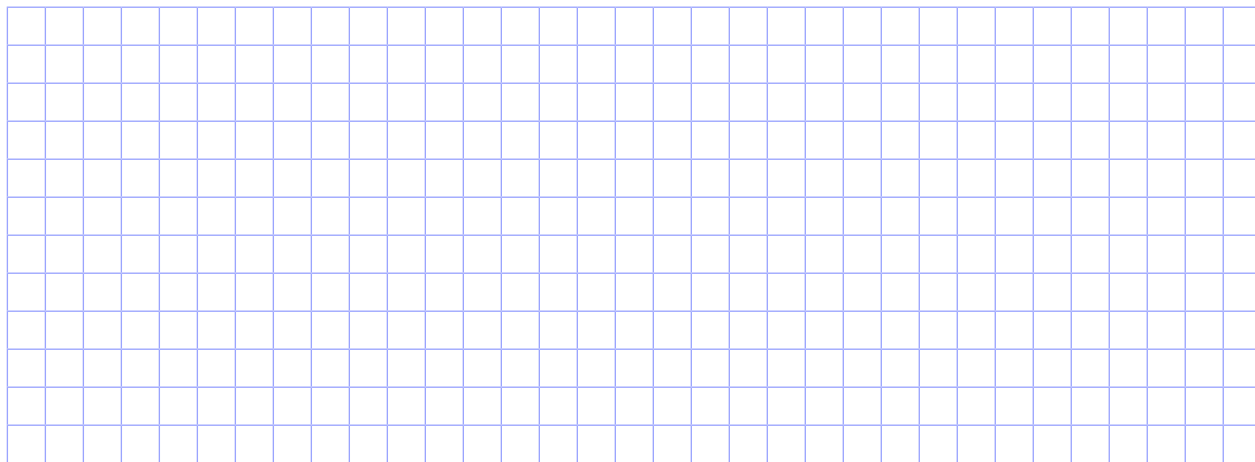
Відповідь. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$.

Зауваження. Іноді відбір коренів зручно проводити на тригонометричному колі, використовуючи градусну міру отриманих розв'язків.

Наприклад для попереднього завдання: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ або $x = 18^\circ + n \cdot 36^\circ$.



Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin 7x \cdot \cos 4x = -1$.



V. Звуження області визначення рівняння

При розв'язуванні деяких тригонометричних рівнянь може відбутися втрата коренів. Це пов'язано із застосуванням формул, у яких ліва та права частини мають різні області визначення, причому права частина має «вужчу» область визначення, ніж ліва.

Це, наприклад, такі формули:

1. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$

$$2. \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$3. \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

$$4. \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$5. \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$6. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Так, у формулі (1) ліва частина визначена при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а права частина — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} m$, $m \in \mathbb{Z}$. У формулі (2) ліва частина має зміст при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а права — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Для лівої частини формули (3) $\alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а для правої частини, до цих обмежень додаються ще $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

У формулах (4) і (5) ліві частини визначені при будь-якому дійсному α , а праві частини — при $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

У формулі (6) область визначення лівої частини задається нерівністю $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а в правій частині до цього обмеження додається $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заміна під час розв'язування тригонометричних рівнянь лівої частини зазначених формул правою, може призвести до втрати коренів, оскільки відбувається звуження області визначення рівняння. Тому після застосування формул із різними областями визначення необхідно виконати перевірку для тих значень невідомої, для яких права частина формул не визначена, але ліва частина визначена.

Наприклад, при застосуванні формул (4) і (5) — це $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \cos 2x = 0$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ на $\cos x$ і засто-

сувавши формули $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, отримаємо рівняння

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} + \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

Область визначення початкового рівняння $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Область визначення нового рівняння $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$ та $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Без-

посередньою підстановкою $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ у початкове рівняння переконуємося

в тому, що $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — розв'язок рівняння.

$$\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} - \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0.$$

Значення x , при яких $\operatorname{tg} x = 1$, не є розв'язками останнього рівняння, тому, поділивши на $\operatorname{tg} x - 1$, отримаємо рівносильне рівняння

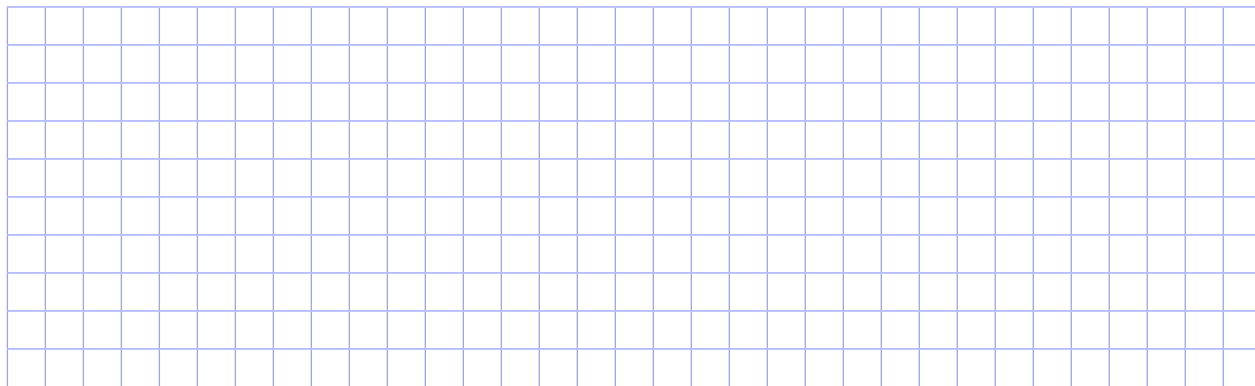
$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} - \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0, \text{ розв'язком якого є } \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Об'єднання множин $x = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ та $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ можна записати так

$$\frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час роботи обертового сканера у центрі циліндричної платформи встановлено лазер, що рівномірно обертається в горизонтальній площині і кут повороту якого залежить від часу і задається формулою $\varphi_1(t) = 2t + \frac{\pi}{6}$. У той же час платформа теж рівномірно обертається і кут її повороту задається формулою $\varphi_2(t) = -t + \frac{\pi}{3}$ (час вимірюється в секундах, а кути — в радіанах). У платформі зроблений один отвір, який на початку вимірювання суміщений із променем лазера. Лаборант хоче визначити скільки разів упродовж перших 30 с після початку вимірювання промінь лазера знову суміститься з отвором. Допоможіть йому це зробити.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin x}{x+2\pi} = 0; \quad 2) \frac{\cos \pi x}{x - \frac{1}{2}} = 0; \quad 3) \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0; \quad 4) \frac{\sin x - 1}{3x - \pi} = 0.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0; \quad 2) \frac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0;$$
$$3) \frac{2\sin^2 x - \cos 2x}{12x^2 - 4\pi x - \pi^2} = 0; \quad 4) \frac{\cos 2x - \sin x}{\pi^2 + 8\pi x + 12x^2} = 0.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0; \quad 2) \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0; \quad 3) \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0; \quad 4) \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{\sin x} + 1 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos x$.

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x - 2\sin \pi x} = 0; \quad 2) \sqrt{3 - x} \cos \pi x = 0; \quad 3) \sqrt{x + 4} \operatorname{ctg} 3x = 0; \quad 4) \sqrt{7 - x} \operatorname{ctg} 2x = 0.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\cos \pi x - \sqrt{3} \sin \pi x - \cos 3\pi x}{x^2 - 4x + 3} = 0; \quad 2) \frac{\sin 3\pi x + \sin 5\pi x - \sin 4\pi x}{9x^2 - 1} = 0;$$
$$3) \frac{\cos \pi x - \cos 2\pi x - \sin 3\pi x}{2x^2 + x} = 0; \quad 4) \frac{\sin 3\pi x - 4 \sin \pi x \cos 2\pi x}{6x^2 - 19x + 3} = 0.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0; \quad 2) \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = 0;$$
$$3) \frac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0; \quad 4) \frac{\sin x - \sin 3x}{1 + \cos x} = 0.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{1 + \cos x} = 0; \quad 2) \frac{\cos x - 4\sin^2 x \cos x}{\sin 3x + 1} = 0;$$
$$3) \frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0; \quad 4) \frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\cos 3x + 1} = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x; \quad 2) \frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = -2; \quad 3) \frac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1; \quad 4) \frac{\sin 2x}{\cos 3x} = -1.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 1;$

2) $\frac{\sin 3x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 4x.$

6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}.$

7. Знайдіть усі корені рівняння $(2 \sin x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$, які задовольняють нерівність $\cos x > 0$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \operatorname{ctg} x = 1;$

2) $\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2 \cos x}{\cos 3x} = -1.$

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \cos 3x + \cos 5x}{\cos x} + 1 = 0;$

2) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x}.$

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{25 - 4x^2}(3 \sin 2\pi x + 8 \sin \pi x) = 0;$

2) $\sqrt{49 - 4x^2}\left(3 \sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0;$

3) $\sqrt{4 - x^2}(\cos \pi x + \sin \pi x) = 0;$

4) $\sqrt{2 + x - x^2}(2 \cos \pi x - \sqrt{2}) = 0.$

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10 - 18 \cos x} = 6 \cos x - 2;$

2) $\sqrt{37 - 48 \operatorname{ctg} x} = 8 \operatorname{ctg} x - 5.$

12. Знайдіть усі корені рівняння $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{2x^2}{\pi} = 0$, які належать проміжку $[0; \pi]$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{\sin 2x - 1} = 1;$

2) $\frac{\cos x(3\sqrt{2} - 2 \cos x) - \sin 2x - 1}{1 - \sin 2x} = 1.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3(\cos 2x + \operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0;$

2) $\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$

2) $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7 - \cos x - 6 \cos 2x} = 4 \sin x;$

2) $\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} = \sin x.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3 - 5 \cos x - 7 \sin^2 x} + \cos x = 0;$

2) $\sqrt{\frac{3}{4} + 6 \sin^2 \frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{3x}{4}.$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2 \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}} = 0;$$

$$2) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) + \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{-\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)}} = 0.$$

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм перевірки множин коренів тригонометричного рівняння на їхню тотожність.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

Можливі теми проєктів

1. Порівняння трьох методів відбору коренів тригонометричних рівнянь.
2. Рівносильні перетворення при розв'язуванні тригонометричних рівнянь з параметрами.
3. Типові помилки при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та шляхи їхнього уникнення.
4. Відбір коренів у реальних задачах фізики.
5. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

