

11

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 23. Урок–практикум. Рівносильні перетворення при розв’язанні тригонометричних рівнянь

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Перехід від рівнянь до рівносильних систем рівнянь.
2. Аналіз множин розв’язків тригонометричних рівнянь.
3. Звуження області визначення рівняння.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає серед кількох різних стратегій розв’язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Можна розв’язувати завдання усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв’язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв’язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) При яких перетвореннях тригонометричних рівнянь можна отримати зайві корені?

2) Яке перетворення проблемніше при розв'язуванні рівнянь: те, яке приводить до втрати коренів чи під час якого можна отримати зайві корені?

3) Чи впливає область допустимих значень змінної на корені тригонометричного рівняння?

4) Як здійснюється відбір потрібних коренів тригонометричного рівняння?

5) Чи може додавання до обох частин рівняння певного виразу бути нерівносіллям перетворенням?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$.

Відповідь. 1.

2. Розв'яжіть рівняння $(x - 2)\sqrt{x - 3} = 0$.

Відповідь. 3.

3. Спростіть вираз $\frac{\sin 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 128^\circ \sin 68^\circ}{\cos 44^\circ \cos 16^\circ - \sin 44^\circ \sin 16^\circ}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.

4. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{3} \sin^2 x - \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Спростіть вираз $\frac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha}$.

Відповідь. $\sin 4\alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час роботи обертового сканера у центрі циліндричної платформи встановлено лазер, що рівномірно обертається в горизонтальній площині і кут повороту якого залежить від часу і задається формулою $\varphi_1(t) = 2t + \frac{\pi}{6}$. У той же час платформа теж рівномірно обертається і кут її повороту задається формулою $\varphi_2(t) = -t + \frac{\pi}{3}$ (час вимірюється в секундах, а кути — в радіанах). У платформі зроблений один отвір, який на початку вимірювання суміщений із променем лазера. Лаборант хоче визначити скільки разів упродовж перших 30 с після початку вимірювання промінь лазера знову суміститься з отвором. Допоможіть йому це зробити.

III. Перехід від рівнянь до рівносильних систем

При розв'язуванні рівнянь виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ виникають сторонні корені. Нагадаємо, що таке рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$.

Розв'язання. $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0, \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \neq 1, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Далі зі співвідношення $\frac{\pi}{2} + \pi m \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ отримуємо $m \neq 2k$, але тоді $m = 2k + 1$

і $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

Розв'язання. $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0, \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Якщо $\sin x = 1$, то $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, і $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — корені даного рівняння.

Якщо $\sin x = \frac{1}{2}$, тоді з тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ випливає, що $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Нерівність системи залишає лише одне можливе рівняння — $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, корені якого $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$.

Розв'язання. $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$, $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Очевидно, що при парних значеннях k розв'язки першого рівняння сукупності не задовольняють систему. При $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$, отримуємо

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $2\pi n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

IV. Аналіз множин розв'язків тригонометричних рівнянь

При відборі коренів у процесі розв'язування тригонометричних рівнянь використовують один із наведених способів.

1. Арифметичний спосіб:

- а) безпосередня підстановка отриманих коренів у рівняння та наявні обмеження;
- б) перебір значень цілочислового параметра і обчислення коренів.

2. Алгебричний спосіб:

- а) розв'язування нерівності відносно невідомого цілочислового параметра і обчислення коренів;
- б) дослідження рівняння з двома цілочисловими параметрами.

3. Геометричний спосіб:

- а) зображення коренів на тригонометричному колі з подальшим відбором з урахуванням наявних обмежень;
- б) зображення коренів на числовій прямій з подальшим відбором з урахуванням наявних обмежень.

Ілюстративні приклади

9. Розв'яжіть рівняння $\cos x \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 5x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

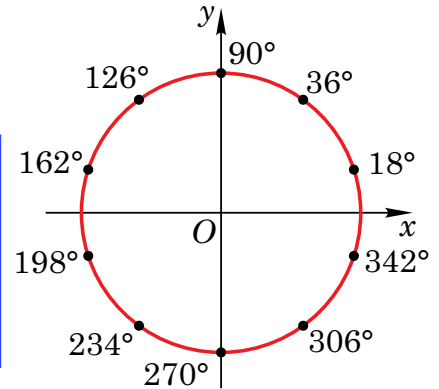
Розглянемо рівність $\frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Після перетворень отримуємо $n = 5k + 2$. Отже, друга множина розв'язків включає в себе першу множину.

Відповідь. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Зауваження. Іноді відбір коренів зручно проводити на тригонометричному колі, використовуючи градусну міру отриманих розв'язків.

Наприклад для попереднього завдання: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ або $x = 18^\circ + n \cdot 36^\circ$.



10. Розв'яжіть рівняння $\sin 7x \cdot \cos 4x = -1$.

Розв'язання. За формулою перетворення добутку синуса і косинуса в суму, приводимо рівняння до виду $\sin 11x + \sin 3x = -2$,

Оскільки $-1 \leq \sin 11x \leq 1$ і $-1 \leq \sin 3x \leq 1$, то рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \sin 11x = -1, \\ \sin 3x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Знайдемо такі цілі значення n і m , при яких наведені множини розв'язків збігаються: $-\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, тобто $3n = -2 + 11m$.

Виразимо з останньої рівності n : $n = 3m + \frac{2m-2}{3}$.

Оскільки n — ціле число, то рівність можлива лише тоді, коли $2m - 2$ ділиться на 3, тобто $2m - 2 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Звідси $m = 1 + k + \frac{k}{2}$.

Оскільки m має бути цілим, то k має бути парним. Якщо $k = 2p$, де $p \in \mathbb{Z}$, то

$$m = 1 + 2p + \frac{2p}{2} = 3p + 1.$$

Отже, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3p+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$.

V. Звуження області визначення рівняння

При розв'язуванні деяких тригонометричних рівнянь може відбутися втрата коренів. Це пов'язано із застосуванням формул, у яких ліва та права частини мають різні області визначення, причому права частина має «вужчу» область визначення, ніж ліва.

Це, наприклад, такі формули:

1. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$

$$2. \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$3. \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

$$4. \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$5. \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$6. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Так, у формулі (1) ліва частина визначена при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а права частина — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} m$, $m \in \mathbb{Z}$. У формулі (2) ліва частина має зміст при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а права — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Для лівої частини формули (3) $\alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а для правої частини, до цих обмежень додаються ще $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

У формулах (4) і (5) ліві частини визначені при будь-якому дійсному α , а праві частини — при $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

У формулі (6) область визначення лівої частини задається нерівністю $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а в правій частині до цього обмеження додається $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заміна під час розв'язування тригонометричних рівнянь лівої частини зазначених формул правою, може призвести до втрати коренів, оскільки відбувається звуження області визначення рівняння. Тому після застосування формул із різними областями визначення необхідно виконати перевірку для тих значень невідомої, для яких права частина формул не визначена, але ліва частина визначена.

Наприклад, при застосуванні формул (4) і (5) — це $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

$$11. \quad \text{Розв'яжіть рівняння } \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ на $\cos x$ і засто-

сувавши формули $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, отримаємо рівняння

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} + \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

Область визначення початкового рівняння $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Область визначення нового рівняння $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$ та $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Без-

посередньою підстановкою $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ у початкове рівняння переконуємося

в тому, що $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — розв'язок рівняння.

$$\frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} - \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0.$$

Значення x , при яких $\operatorname{tg} x = 1$, не є розв'язками останнього рівняння, тому, поділивши на $\operatorname{tg} x - 1$, отримаємо рівносильне рівняння

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} - \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0, \text{ розв'язком якого є } \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Об'єднання множин $x = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ та $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ можна записати так

$$\frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

12. Розв'яжіть рівняння $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини останнього рівняння на $1 + \operatorname{tg}^2 x$. Зрозуміло, що таке перетворення не порушує рівносильності. Маємо: $\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Оскільки існує формула $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, то виникає бажання замінити праву частину останнього рівняння на $\cos 2x$. Проте така заміна розширить його область визначення на множину чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отже, дане рівняння рівносиль-

$$\text{не системі } \begin{cases} \sin x = \cos 2x, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час роботи обертового сканера у центрі циліндричної платформи встановлено лазер, що рівномірно обертається в горизонтальній площині і кут повороту якого залежить від часу і задається формулою $\varphi_1(t) = 2t + \frac{\pi}{6}$. У той же час платформа теж рівномірно обертається і кут її повороту задається формулою $\varphi_2(t) = -t + \frac{\pi}{3}$ (час вимірюється в секундах, а кути — в радіанах). У платформі зроблений один отвір, який на початку вимірювання суміщений із променем лазера. Лаборант хоче визначити скільки разів упродовж перших 30 с після початку вимірювання промінь лазера знову суміститься з отвором. Допоможіть йому це зробити.

Розв'язання. За умовою, потрібно знайти кількість значень t , за яких

$$\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ але потрібно виключити розв'язки, за яких}$$

$$\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + \left(-t + \frac{\pi}{3}\right) = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-t + \frac{\pi}{3}\right) = 0, & 2\sin\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ t + \frac{\pi}{2} \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; & t \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} \frac{3t}{2} - \frac{\pi}{12} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ t \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \right. & \begin{cases} \left[\begin{aligned} t = \frac{\pi}{18} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ t \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \right. & \begin{cases} t = \frac{\pi}{18} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ t \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Множини $\frac{\pi}{18} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ і $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не збігаються, тому розглянемо нерівність

$$0 < \frac{\pi}{18} + 2\pi n < 30, \quad 0 < \pi + 36\pi n < 540,$$

$$-\pi < 36\pi n < 540 - \pi, \quad -\frac{1}{36} < n < \frac{540 - \pi}{36\pi}. \text{ Звідки } n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Тобто промінь суміститься з отвором 5 разів упродовж перших тридцяти секунд.

Відповідь. 5 разів.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin x}{x+2\pi} = 0; \quad 2) \frac{\cos \pi x}{x - \frac{1}{2}} = 0; \quad 3) \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0; \quad 4) \frac{\sin x - 1}{3x - \pi} = 0.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0; \quad 2) \frac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0;$$

$$3) \frac{2\sin^2 x - \cos 2x}{12x^2 - 4\pi x - \pi^2} = 0; \quad 4) \frac{\cos 2x - \sin x}{\pi^2 + 8\pi x + 12x^2} = 0.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0; \quad 2) \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0; \quad 3) \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0; \quad 4) \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{\sin x} + 1 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos x$.

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x - 2} \sin \pi x = 0; \quad 2) \sqrt{3 - x} \cos \pi x = 0; \quad 3) \sqrt{x + 4} \operatorname{ctg} 3x = 0; \quad 4) \sqrt{7 - x} \operatorname{ctg} 2x = 0.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\cos \pi x - \sqrt{3} \sin \pi x - \cos 3\pi x}{x^2 - 4x + 3} = 0; \quad 2) \frac{\sin 3\pi x + \sin 5\pi x - \sin 4\pi x}{9x^2 - 1} = 0;$$

$$3) \frac{\cos \pi x - \cos 2\pi x - \sin 3\pi x}{2x^2 + x} = 0; \quad 4) \frac{\sin 3\pi x - 4 \sin \pi x \cos 2\pi x}{6x^2 - 19x + 3} = 0.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0; \quad 2) \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = 0;$$

$$3) \frac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0; \quad 4) \frac{\sin x - \sin 3x}{1 + \cos x} = 0.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{1 + \cos x} = 0; \quad 2) \frac{\cos x - 4 \sin^2 x \cos x}{\sin 3x + 1} = 0;$$

$$3) \frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0; \quad 4) \frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\cos 3x + 1} = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x; \quad 2) \frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = -2; \quad 3) \frac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1; \quad 4) \frac{\sin 2x}{\cos 3x} = -1.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 1;$

2) $\frac{\sin 3x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 4x.$

6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}.$

7. Знайдіть усі корені рівняння $(2 \sin x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$, які задовольняють нерівність $\cos x > 0$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \operatorname{ctg} x = 1;$

2) $\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2 \cos x}{\cos 3x} = -1.$

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \cos 3x + \cos 5x}{\cos x} + 1 = 0;$

2) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x}.$

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{25 - 4x^2}(3 \sin 2\pi x + 8 \sin \pi x) = 0;$

2) $\sqrt{49 - 4x^2}\left(3 \sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0;$

3) $\sqrt{4 - x^2}(\cos \pi x + \sin \pi x) = 0;$

4) $\sqrt{2 + x - x^2}(2 \cos \pi x - \sqrt{2}) = 0.$

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10 - 18 \cos x} = 6 \cos x - 2;$

2) $\sqrt{37 - 48 \operatorname{ctg} x} = 8 \operatorname{ctg} x - 5.$

12. Знайдіть усі корені рівняння $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{2x^2}{\pi} = 0$, які належать проміжку $[0; \pi]$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{\sin 2x - 1} = 1;$

2) $\frac{\cos x(3\sqrt{2} - 2 \cos x) - \sin 2x - 1}{1 - \sin 2x} = 1.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3(\cos 2x + \operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0;$

2) $\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$

2) $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1.$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7 - \cos x - 6 \cos 2x} = 4 \sin x;$

2) $\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} = \sin x.$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3 - 5 \cos x - 7 \sin^2 x} + \cos x = 0;$

2) $\sqrt{\frac{3}{4} + 6 \sin^2 \frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{3x}{4}.$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2 \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}} = 0;$$

$$2) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) + \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{-\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)}} = 0.$$

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм перевірки множин коренів тригонометричного рівняння на їхню тотожність.

VIII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

Можливі теми проєктів

1. Порівняння трьох методів відбору коренів тригонометричних рівнянь.
2. Рівносильні перетворення при розв'язуванні тригонометричних рівнянь з параметрами.
3. Типові помилки при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та шляхи їхнього уникнення.
4. Відбір коренів у реальних задачах фізики.
5. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.