

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 24. Системи тригонометричних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) зрозумієте, що таке система тригонометричних рівнянь;
- 2) дізнаєтесь класифікацію основних методів розв'язування систем тригонометричних рівнянь;
- 3) дізнаєтесь навіщо необхідно обирати різні параметри при записі розв'язків системи тригонометричних рівнянь;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\sin 3645^\circ$.
2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 18, \\ x - y = 6. \end{cases}$$
3. Спростіть вираз $1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha - 1}$.
4. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) + \sin \alpha + \sin(2\pi + \alpha)$.
5. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \cos x$.

III. Приклади систем тригонометричних рівнянь

Тригонометричні рівняння відіграють важливу роль у моделюванні періодичних процесів, а системи тригонометричних рівнянь дозволяють описувати ситуації, при яких одночасно виконуються кілька умов. При розв'язанні систем тригонометричних рівнянь

потрібно знайти спільні розв'язки кількох рівнянь, одне або декілька з яких — тригонометричні. Наведемо приклади систем тригонометричних рівнянь, не розв'язуючи їх.

Приклад 1. Приклад системи, в якій одне рівняння — алгебричне, а друге містить

тригонометричні функції:
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Приклад 2. Приклад системи, в якій обидва рівняння містять тригонометричні функції:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

IV. Методи розв'язування систем рівнянь

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

1. Метод підстановки.

Виражаємо в одному з рівнянь системи одну змінну через іншу, а потім підставляємо отриманий вираз в інше рівняння системи. Отримуємо рівняння з однією змінною.

2. Метод додавання.

Замінюємо одне з рівнянь системи сумою або різницею двох даних рівнянь, помножених, за потреби, на деякі відмінні від нуля числа.

3. Метод множення.

Замінюємо одне з рівнянь системи добутком або часткою двох даних рівнянь, за умови, що жодна із частин даних рівнянь тотожно не дорівнює нулю.

4. Графічний метод.

В одній системі координат будуємо графіки усіх рівнянь системи та знаходимо координати точок їхнього перетину. Метод ефективний, коли потрібно встановити кількість розв'язків системи рівнянь.

5. Нестандартні методи.

Оцінюємо значення виразів, з яких складаються рівняння системи, досліджуємо властивості функцій, доводимо нерівності, зважуємо можливості оригінальних підходів до розв'язування систем тощо.

Приклад 3. Оберіть метод розв'язування системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Систему рівнянь зручно розв'язувати методом підстановки.

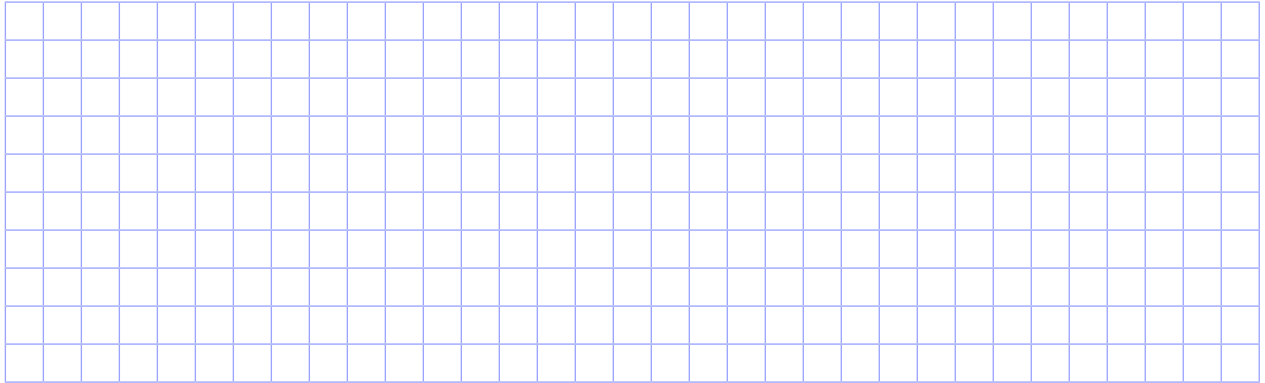
Для цього виразимо, наприклад, x із першого рівняння системи: $x = \frac{\pi}{3} + y$.

Підставляємо вираз відносно x у друге рівняння системи:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right) - \sin y = \frac{1}{2}.$$

Далі потрібно розв'язати рівняння відносно змінної y .

Приклад 4. Оберіть метод розв'язування системи рівнянь
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$



V. Необхідність вибору різних параметрів (цілих чисел) у записі множин розв'язків систем тригонометричних рівнянь

Приклад 5. Розв'яжемо систему
$$\begin{cases} \sin(x + y) = 1, \\ \sin(x - y) = -0,5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Цілочисельні параметри k і n , які використані для запису розв'язків, не можна позначати однією буквою. Це означало б, що параметри k і n мають набувати однакових значень. Насправді, вони набувають будь-яких цілих значень — однакових і різних.

Покажемо це на прикладі наведеної системи.

Правильне розв'язання.

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(k + n), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(k - n); \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(k + n), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(k - n), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); \frac{\pi}{3} + \pi(k - n)\right), \left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k + n); \frac{2\pi}{3} + \pi(k - n)\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Неправильне розв'язання (з однаковим параметром).

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{3}; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.$$

Таким чином, пара чисел $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком початкової системи, але не є розв'язком останньої сукупності. Отже, виконано нерівносильне перетворення, а тому втрачено розв'язки.

Висновок. Таким чином, різні параметри потрібно використовувати тоді, коли потрібно розв'язати два різних тригонометричних рівняння.

Приклад 6. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}, \\ 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо частку першого й другого рівнянь системи: $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Звідси $x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння: $\cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5, y = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

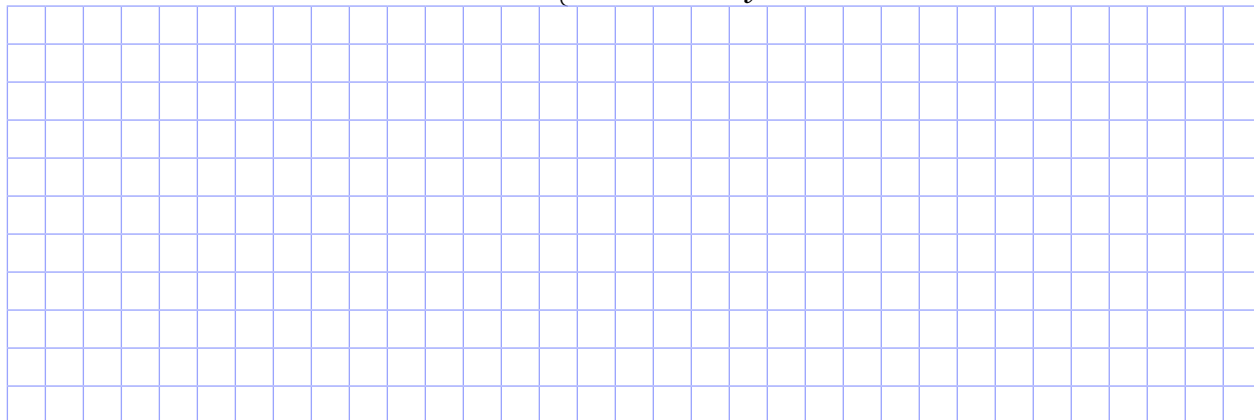
Повернемося до системи:

$$\left[\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(k+n), \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n); \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi(k+n); -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 7. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$$



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два дрони здійснюють обліт навколо радіовежі. Вони рухаються по колу, з радіусом 1 км. Обидва дрони рухаються зі сталими швидкостями і в одній площині, але починають рух із різних точок кола. Уведемо декартову систему координат так, що її початок міститься в точці розташування радіовежі, а одиничний відрізок вибрано завдовжки 1 км. Перший дрон перебуває в точці $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$, а другий дрон — у точці $B(\cos \beta; \sin \beta)$, де α і β — кути повороту (у радіанах) дронів навколо початку координат, відносно заданої початкової точки. Центр управління отримав телеметричні дані, з яких відомо, що сума першої координати другого дрона та другої координати першого дрона дорівнює 0, а сума квадратів зазначених координат дорівнює 0,5. Зайдіть усі можливі кути α і β , що задовольняють дані умови.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному з яких система
$$\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 має розв'язки.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x + \cos y = \cos \frac{\pi}{8}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ 2 \cos x + 4 \cos y = 3. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{6}, \\ \sin x \cos y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2 y + \sin^2 x = 1,5, \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x \sin 2y = 1. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2 \cos x \cos y = 1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25, \\ x + y = \frac{5}{6}\pi. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = 0,25. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{5}{3} \pi, \\ \sin x = 2 \sin y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \pi, \\ \sin 2x + \cos y = 0. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1, \\ 9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x = \cos^2 y, \\ \sin 2x = \cos y. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sqrt{3} \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \end{cases}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6}, \\ 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2(1 + \cos^2(x - y)); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y + \sin^2 \frac{x}{2} \sin y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin y, \\ 2x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{7}{12} \pi, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2}, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

12. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} \pi y = \frac{1 + \operatorname{tg} \pi x}{1 - \operatorname{tg} \pi x}, \\ 2x^2 + y^2 = \frac{3}{8}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi y) = \frac{3 + \sqrt{3} \operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt{3} - 3 \operatorname{tg}(\pi x)}, \\ x^2 - x + y^2 + \frac{17}{72} = 0. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{7}{12} \pi, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \operatorname{ctg} y = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \sin y + \sin^2 x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3 \cos y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 3(\sin x + \sin y), \\ \cos 2x + \cos 2y = \cos x + \cos y. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin \left(y - \frac{3}{4} \pi \right), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

7. Творче завдання. Розв'яжіть конкурсну задачу 2 не використовуючи перехід до полярних координат. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному з яких

система $\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має розв'язки.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-

3) У мене залишилися запитання щодо

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Застосування тригонометричних рівнянь у фізиці коливальних рухів.
- 2.** Фігури Лісажу та їхня побудова з використанням систем тригонометричних рівнянь.
- 3.** Графічний метод розв'язування систем тригонометричних рівнянь за допомогою Geogebra.
- 4.** Системи тригонометричних рівнянь у задачах супутникової навігації.
- 5.** Взаємне «гасіння» і підсилення хвиль.







