

11

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 24. Системи тригонометричних рівнянь

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Приклади систем тригонометричних рівнянь.
2. Методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь.
3. Необхідність вибору різних параметрів у записі множин розв'язків рівнянь систем.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна визначити положення двох об'єктів, що рухаються по колу, якщо відомі деякі відношення між їхніми координатами?

2) Яка математична модель сприятиме визначенню однакового розташування двох маятників з різними фазами й частотами?

3) Чи можна передбачити ситуацію, коли дрони, які рухаються по колових траєкторіях, перебуватимуть на однакових відстанях до певних точок?

4) Навіщо розробникам систем мобільного зв'язку вміти моделювати взаємне положення супутників чи антен за допомогою систем тригонометричних рівнянь?

5) Чи допомагають системи тригонометричних рівнянь у моделюванні поведінки клімату, руху повітряних мас чи морських течій?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\sin 3645^\circ$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 18, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Відповідь. (12; 6).

3. Спростіть вираз $1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha - 1}$.

Відповідь. $-\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) + \sin \alpha + \sin(2\pi + \alpha)$.

Відповідь. 0.

5. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \cos x$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два дрони здійснюють обліт навколо радіовежі. Вони рухаються по колу, з радіусом 1 км. Обидва дрони рухаються зі сталими швидкостями і в одній площині, але починають рух із різних точок кола. Уведемо декартову систему координат так, що її початок міститься в точці розташування радіовежі, а одиничний відрізок вибрано завдовжки 1 км. Перший дрон перебуває в точці $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$, а другий дрон — у точці $B(\cos \beta; \sin \beta)$, де α і β — кути повороту (у радіанах) дронів навколо початку координат, відносно заданої початкової точки. Центр управління отримав телеметричні дані, з яких відомо, що сума першої координати другого дрона та другої координати першого дрона дорівнює 0, а сума квадратів зазначених координат дорівнює 0,5. Зайдіть усі можливі кути α і β , що задовольняють дані умови.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному

з яких система
$$\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 має розв'язки.

III. Приклади систем тригонометричних рівнянь

Тригонометричні рівняння відіграють важливу роль у моделюванні періодичних процесів, а системи тригонометричних рівнянь дозволяють описувати ситуації, при яких одночасно виконується кілька умов. При розв'язанні систем тригонометричних рівнянь потрібно знайти спільні розв'язки кількох рівнянь, одне або декілька з яких — тригонометричні. Наведемо приклади систем тригонометричних рівнянь, не розв'язуючи їх.

Ілюстративні приклади

6. Приклад системи, в якій одне рівняння — алгебричне, а друге містить тригонометричні функції:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

7. Приклад системи, в якій обидва рівняння містять тригонометричні функції:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

IV. Методи розв'язування систем рівнянь

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

1. Метод підстановки.

Виражаємо в одному з рівнянь системи одну змінну через іншу, а потім підставляємо отриманий вираз в інше рівняння системи. Отримуємо рівняння з однією змінною.

2. Метод додавання.

Замінюємо одне з рівнянь системи сумою або різницею двох даних рівнянь, помножених, за потреби, на деякі відмінні від нуля числа.

3. Метод множення.

Замінюємо одне з рівнянь системи добутком або часткою двох даних рівнянь, за умови, що жодна із частин даних рівнянь тотожно не дорівнює нулю.

4. Графічний метод.

В одній системі координат будуємо графіки усіх рівнянь системи та знаходимо координати точок їхнього перетину. Метод ефективний, коли потрібно встановити кількість розв'язків системи рівнянь.

5. Нестандартні методи.

Оцінюємо значення виразів, з яких складаються рівняння системи, досліджуємо властивості функцій, доводимо нерівності, зважуємо можливості оригінальних підходів до розв'язування систем тощо.

Ілюстративні приклади

8. Оберіть метод розв'язування системи рівнянь
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Систему рівнянь зручно розв'язувати методом підстановки.

Для цього виразимо, наприклад, x із першого рівняння системи: $x = \frac{\pi}{3} + y$.

Підставляємо вираз відносно x у друге рівняння системи:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right) - \sin y = \frac{1}{2}.$$

Далі потрібно розв'язати рівняння відносно змінної y .

9. Оберіть метод розв'язування системи рівнянь
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Систему рівнянь доцільно розв'язувати методом додавання.

Першим рівнянням системи запишемо суму даних рівнянь, а другим рівнянням — різницю рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0,5; \end{cases} \begin{cases} \sin(x+y) = 1; \\ \sin(x-y) = -0,5. \end{cases}$$

Далі потрібно знайти $x+y$ та $x-y$, розв'язанням тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду отримаємо систему алгебричних рівнянь.

10. Оберіть метод розв'язування системи рівнянь
$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}, \\ 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Систему рівнянь доцільно розв'язати методом множення (частки) рівнянь системи. Розглянемо частку першого і другого рівняння, отримаємо:

$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Знаходимо $x-y$, розв'язанням тригонометричного рівняння найпростішого вигляду. Виконаємо підстановку в необхідні рівняння.

V. Необхідність вибору різних параметрів (цілих чисел) у записі множин розв'язків систем тригонометричних рівнянь

Приклад. Розв'яжемо систему
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -0,5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x-y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Цілочисельні параметри k і n , які використані для запису розв'язків, не можна позначати однією буквою. Це означало б, що параметри k і n мають набувати однакових значень. Насправді, вони набувають будь-яких цілих значень — однакових і різних.

Покажемо це на прикладі наведеної системи.

Правильне розв'язання.

$$\left[\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(k-n); \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(k-n), \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right]$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k+n); \frac{\pi}{3} + \pi(k-n) \right), \left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+n); \frac{2\pi}{3} + \pi(k-n) \right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Неправильне розв'язання (з однаковим параметром).

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{3}; \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.]$$

Таким чином, пара чисел $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком початкової системи, але не є розв'язком останньої сукупності. Отже, виконано нерівносильне перетворення, а тому втрачено розв'язки.

Висновок. Таким чином, різні параметри потрібно використовувати тоді, коли потрібно розв'язати два різних тригонометричних рівняння.

Ілюстративні приклади

11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}, \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо частку першого й другого рівнянь системи: $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Звідси $x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння: $\cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5, y = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Повернемося до системи:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(k+n), \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n); \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi(k+n); -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

12. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Зробимо заміну $u = \sin x$, $v = \cos y$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - v^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 1, \\ (u - v)(u + v) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 1, \\ u - v = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1, \\ v = 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 0. \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{2} \sin y, \\ \operatorname{ctg} x = \sqrt{2} \cos y. \end{cases}$

Розв'язання. Перемножимо дані рівняння:

$$1 = 2 \sin y \cos y, \quad \sin 2y = 1, \quad 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad y = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Розіб'ємо отриману множину на дві підмножини:

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{та} \quad y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Підставимо обидва цих значення в перше рівняння системи:

1) $y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, тоді $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, тоді $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два дрони здійснюють обліт навколо радіовежі. Вони рухаються по колу, з радіусом 1 км. Обидва дрони рухаються зі сталими швидкостями і в одній площині, але починають рух із різних точок кола. Уведемо декартову систему координат так, що її початок міститься в точці розташування радіовежі, а одиничний відрізок вибрано завдовжки 1 км. Перший дрон перебуває в точці $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$, а другий дрон — у точці $B(\cos \beta; \sin \beta)$, де α і β — кути повороту (у радіанах) дронів навколо початку координат, відносно заданої початкової точки. Центр управління отримав телеметричні дані, з яких відомо, що сума першої координати другого дрона та другої координати першого дрона дорівнює 0, а сума квадратів зазначених координат дорівнює 0,5. Зайдіть усі можливі кути α і β , що задовольняють дані умови.

Розв'язання. За умовою задачі, складаємо два рівняння:

$$\cos \beta + \sin \alpha = 0 \text{ та } \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha = 0,5.$$

Маємо систему тригонометричних рівнянь:
$$\begin{cases} \cos \beta + \sin \alpha = 0, \\ \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha = 0,5. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:
$$\begin{cases} \sin \alpha = -\cos \beta, \\ \cos^2 \beta + (-\cos \beta)^2 = 0,5. \end{cases}$$

$$2\cos^2 \beta = 0,5, \quad \cos^2 \beta = 0,25.$$

$$\text{Тоді } \cos \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta_2 = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\beta_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\alpha_1 = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + \pi l \right), \left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m \right), \quad n, k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному

з яких система
$$\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 має розв'язки.

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат, увівши заміну $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\begin{cases} r^2 \cos \varphi \sin \varphi (2r^2 \cos^2 \varphi - a^2) = 1, \\ r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} r^2 \cos \varphi \sin \varphi (2r^2 \cos^2 \varphi - r^2) = 1, \\ r^2 = a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^4 \cos \varphi \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1) = 1, \\ r^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} r^4 \cos \varphi \sin \varphi \cos 2\varphi = 1, \\ r^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{r^4}{4} \sin 4\varphi = 1, \\ r^2 = a^2; \end{cases} \quad \sin 4\varphi = \frac{4}{a^4}.$$

Це означає, що дана система матиме розв'язки лише при $\frac{4}{a^4} \leq 1$, що рівносильно

$$\text{сукупності} \begin{cases} a \geq \sqrt{2}, \\ a \leq -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x + \cos y = \cos \frac{\pi}{8}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ 2\cos x + 4\cos y = 3. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{6}, \\ \sin x \cos y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2 y + \sin^2 x = 1,5, \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x \sin 2y = 1. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2\cos x \cos y = 1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25, \\ x + y = \frac{5}{6} \pi. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = 0,25. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{5}{3} \pi, \\ \sin x = 2 \sin y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \pi, \\ \sin 2x + \cos y = 0. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1, \\ 9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x = \cos^2 y, \\ \sin 2x = \cos y. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sqrt{3} \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \end{cases}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6}, \\ 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2(1 + \cos^2(x - y)); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y + \sin^2 \frac{x}{2} \sin y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin y, \\ 2x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{7}{12} \pi, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2}, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

12. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} \pi y = \frac{1 + \operatorname{tg} \pi x}{1 - \operatorname{tg} \pi x}, \\ 2x^2 + y^2 = \frac{3}{8}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi y) = \frac{3 + \sqrt{3} \operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt{3} - 3 \operatorname{tg}(\pi x)}, \\ x^2 - x + y^2 + \frac{17}{72} = 0. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{7}{12} \pi, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \operatorname{ctg} y = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \sin y + \sin^2 x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3 \cos y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 3(\sin x + \sin y), \\ \cos 2x + \cos 2y = \cos x + \cos y. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin \left(y - \frac{3}{4} \pi \right), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

7. **Творче завдання.** Розв'яжіть конкурсну задачу 2 не використовуючи перехід до полярних координат. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному з яких

система $\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має розв'язки.

VIII. Рефлексія (1 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Застосування тригонометричних рівнянь у фізиці коливань.
2. Фігури Лісажу та їхня побудова з використанням систем тригонометричних рівнянь.
3. Графічний метод розв'язування систем тригонометричних рівнянь за допомогою Geogebra.
4. Системи тригонометричних рівнянь у задачах супутникової навігації.
5. Взаємне «гасіння» і підсилення хвиль.