

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 25. Урок–практикум. Розв’язування систем тригонометричних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати системи тригонометричних рівнянь методом підстановки;
- 2) розв’язувати системи тригонометричних рівнянь методом додавання;
- 3) розв’язувати системи тригонометричних рівнянь методом множення;
- 4) нестандартним методам розв’язування систем тригонометричних рівнянь;
- 5) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Визначте знак виразу $\cos 5$.
2. Знайдіть головний період функції $f(x) = \sin^2 x$.
3. Спростіть вираз $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.
4. Обчисліть: $\frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{Atg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{Atg} 48^\circ}$.
5. Розв’яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = -1$.

III. Методи розв'язування систем рівнянь

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

1. Метод підстановки.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; y) = 0 \end{cases}$ замінити в другому рівнянні змінну у виразом $f(x)$, то отримаємо систему $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; f(x)) = 0, \end{cases}$ яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу підстановки для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

2. Метод додавання.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x; y) + G(x; y) = 0$ або рівнянням $F(x; y) - G(x; y) = 0$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу додавання для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

3. Метод множення.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x; y) = c_1, \\ G(x; y) = c_2, \end{cases}$ де $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$, замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x; y)G(x; y) = c_1c_2$ або рівнянням $\frac{F(x; y)}{G(x; y)} = \frac{c_1}{c_2}$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу множення для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

4. Графічний метод.

Полягає у зображенні графіків усіх рівнянь системи та знаходженні координат точок перетину побудованих графіків. Використовується, якщо потрібно встановити не розв'язки, а кількість розв'язків системи рівнянь.

5. Нестандартні методи.

Ґрунтуються на оцінці значень виразів, властивостях функцій, доведеннях нерівностей і т. ін.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо й віднімаємо рівняння системи, отримуємо рівносильну си-

стему:
$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0. \end{cases}$$

Застосуємо формули косинуса різниці та косинуса суми двох кутів:

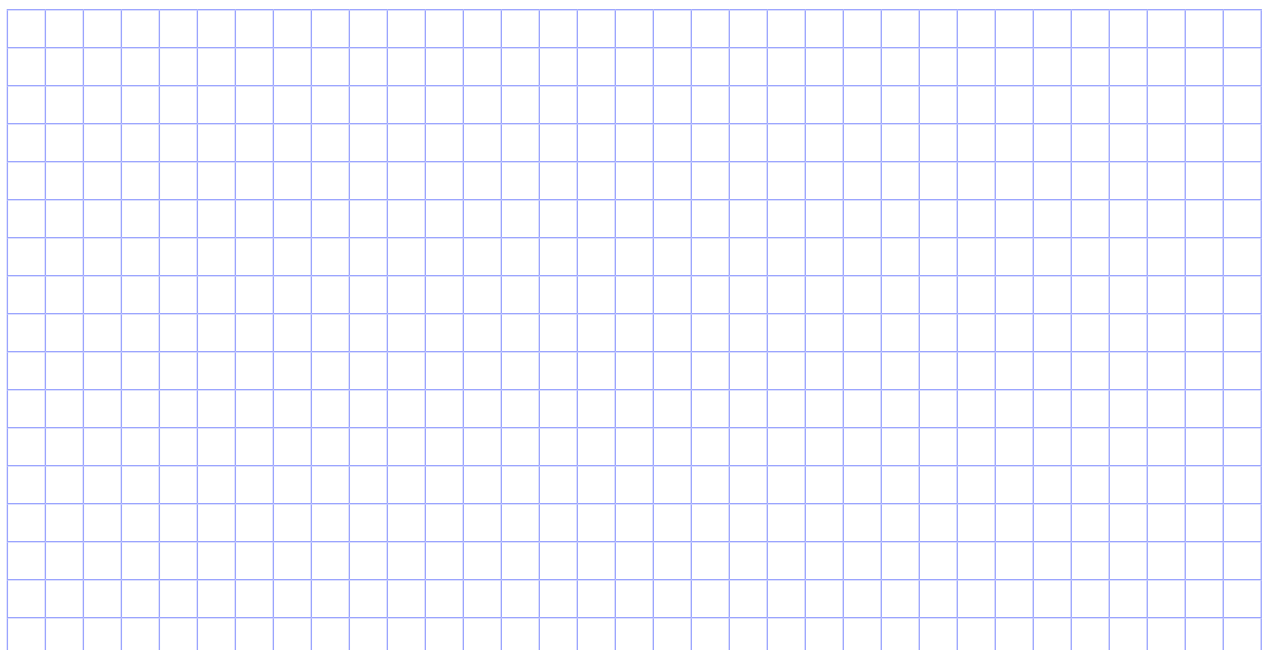
$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Додамо і віднімаємо рівняння останньої системи:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + \pi(2k+n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-2k), n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k+n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n-2k), n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k+n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n-2k), n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k+n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n-2k), n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k+n); \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n-2k)\right), \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k+n); \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n-2k)\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$

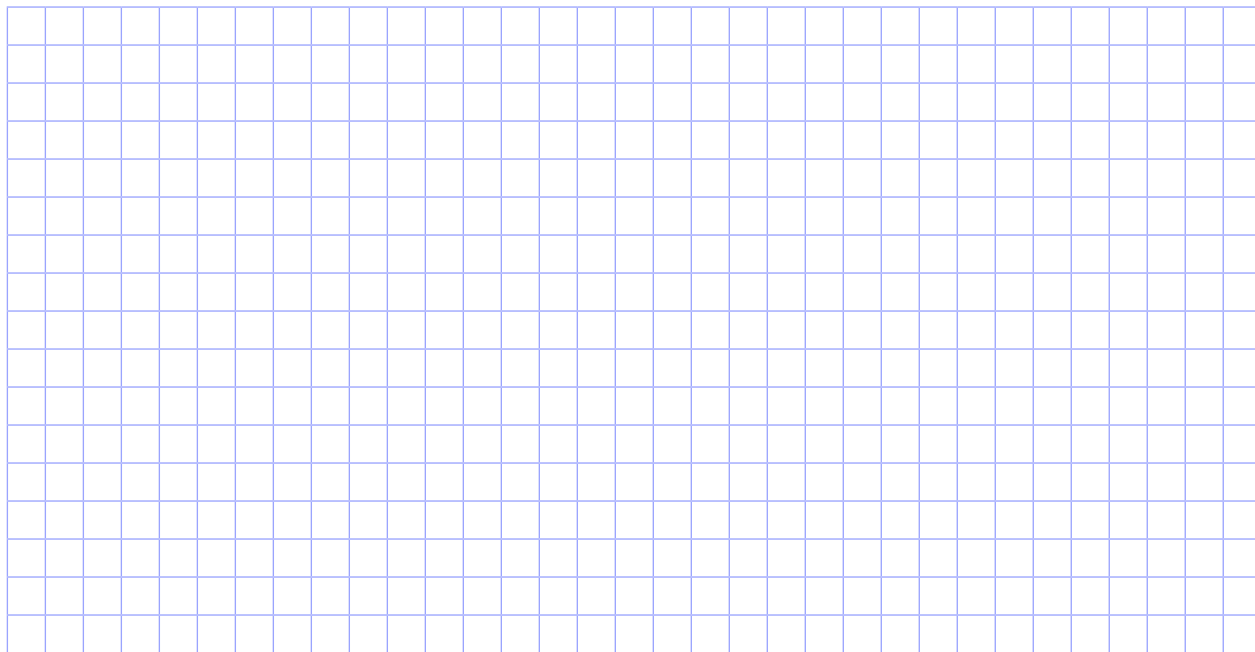


IV. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь дозволяють поєднувати різні методи розв'язування систем. До нестандартних методів розв'язування систем тригонометричних рівнянь можна віднести:

- 1) піднесення одного чи обох рівнянь до квадрата і переході до системи-наслідку, можна розв'язати одним із уже відомих способів;
- 2) застосування заміни змінних;
- 3) застосування формул перетворення добутку в суму чи суми в добуток до певного рівняння системи;
- 4) геометрична інтерпретація рівнянь системи (побудова графіків рівнянь для оцінки наявності розв'язків чи їхньої кількості);
- 5) оцінка лівої й правої частин рівнянь, що входять до системи;
- 6) використання властивостей функцій (монотонності, знакосталості, парності, періодичності тощо).

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 5\cos x - \cos y = 3 \\ 2\sin x \sin(y - x) + \cos y = 1. \end{cases}$$



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t) = \sin(80\pi t + \alpha)$ і $f_2(t) = \sin(80\pi t + \beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t = \frac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t = \frac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

Задача 2. Конкурсна задача. Нехай α, β, γ — кути трикутника. Відомо, що $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ — послідовні натуральні числа. Знайдіть кути α, β, γ .

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \sin y, \\ \cos^2 x = \sin x \cos y. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2 \cos x = 1 + \cos y, \\ 2 \sin x = \sin y. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1}{9}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = 0,36, \\ \sin x \sin y = 0,36. \end{cases}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{5} \cos y; \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \cos y = 0,25, \\ \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 0,5; \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y; \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + \sin(x+y) = 1,5, \\ 3x - \sin(x+y) = 2,5; \end{cases}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10; \end{cases}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg}(3y - 5 \cos^2 x) = 1, \\ 3y - 10 \cos^2 x = \frac{\pi}{4} - 1; \end{cases}$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y, \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos(x-y) - 2y = -1,5, \\ 3 \cos(x-y) + y = 2,5. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{ctg}(2y - \cos^2 x) = 1, \\ 6y - 15 \cos^2 x = \frac{3}{4} \pi - 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \sin y, \\ \cos^2 x = \sin x \cos y. \end{cases}$$

12. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos(x - 2y) = a \cos^3 y, \\ \sin(x - 2y) = a \cos^3 y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2 \sin 2x + \sin 2y = 1. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2(-2x) + (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg}(5y) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} - 1); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2(4x) + \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \operatorname{tg}(-2y) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \cos(4x) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2(3x) + (4 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0,75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4 - \sqrt{3}) \sin(3x) = 2\sqrt{3} - 0,75; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2(6x) + (\sqrt{5} - 1) \operatorname{ctg}(-9y) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} - 1), \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5} - 1) \cos(6x) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} - 1). \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0,25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4 \cos^2 x + \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{ctg}^4 2x + 32 \sin^2 y = 55, \\ \frac{1}{\sin^2 2x} - 4 \cos y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \left| \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2 \sin 2x = \frac{3}{4} + 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

- 7. Творче завдання.** Розробіть веб-сторінку з методами розв'язування систем тригонометричних рівнянь та прикладами.

Рефлексія

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом підстановки. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом додавання. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом множення. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю основні нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь з параметрами.
2. Застосування симетрії тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
3. Застосування обернених тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
4. Використання методу мажоранти (міноранти) для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.
5. Системи тригонометричних рівнянь в астрономії.







