

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 25. Урок–практикум. Розв’язування систем тригонометричних рівнянь

Тип уроку: урок застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Методи розв’язування систем тригонометричних рівнянь.
2. Розв’язування систем тригонометричних рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв’язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв’язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв’язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому рівняння з однією змінною іноді не достатньо для опису руху тіл?

2) Чи можливо передбачити момент згасання звуку чи світлової хвилі за допомогою тригонометричних рівнянь?

3) Чи можна за допомогою системи тригонометричних рівнянь змодельовати рух маятника у двох площинах?

4) Чи є потреба в знаходженні точного розв'язання системи, якщо можна змодельовати процес на комп'ютері?

5) Чому не існує єдиного методу розв'язування систем тригонометричних рівнянь?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Визначте знак виразу $\cos 5$.

Відповідь. $\cos 5 < 0$.

2. Знайдіть головний період функції $f(x) = \sin^2 x$.

Відповідь. π .

3. Спростіть вираз $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.

Відповідь. 1.

4. Обчисліть: $\frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{Atg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{Atg} 48^\circ}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = -1$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t) = \sin(80\pi t + \alpha)$ і $f_2(t) = \sin(80\pi t + \beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t = \frac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t = \frac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

Задача 2. Конкурсна задача. Нехай α , β , γ — кути трикутника. Відомо, що $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ — послідовні натуральні числа. Знайдіть кути α , β , γ .

III. Методи розв'язування систем рівнянь

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь

1. Метод підстановки.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; y) = 0 \end{cases}$ замінити в другому рівнянні змінну у виразом $f(x)$, то отримаємо систему $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; f(x)) = 0, \end{cases}$ яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу підстановки для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

2. Метод додавання.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x; y) + G(x; y) = 0$ або рівнянням $F(x; y) - G(x; y) = 0$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу додавання для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

3. Метод множення.

Теорема. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x; y) = c_1, \\ G(x; y) = c_2, \end{cases}$ де $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$, замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x; y)G(x; y) = c_1c_2$ або рівнянням $\frac{F(x; y)}{G(x; y)} = \frac{c_1}{c_2}$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Ця теорема лежить в основі методу множення для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

4. Графічний метод.

Полягає у зображенні графіків усіх рівнянь системи та знаходженні координат точок перетину побудованих графіків. Використовується, якщо потрібно встановити не розв'язки, а кількість розв'язків системи рівнянь.

5. Нестандартні методи.

Ґрунтуються на оцінці значень виразів, властивостях функцій, доведеннях нерівностей і т. ін.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо й віднімемо рівняння системи, отримуємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0. \end{cases}$$

Застосуємо формули косинуса різниці та косинуса суми двох кутів:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x + y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Додамо і віднімемо рівняння останньої системи:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + \pi(2k + n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - 2k), n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k + n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n - 2k), n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k + n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n - 2k), n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k + n), k, n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n - 2k), n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2k + n); \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n - 2k)\right), \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k + n); \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n - 2k)\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

7. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$

Розв'язання.
$$\begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y, \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y; \end{cases} \quad \begin{cases} -\cos^2 x = \sin x \sin y, \\ -\sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Додамо перше та друге рівняння системи:

$$-(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x \sin y + \cos x \cos y.$$

Тоді $\cos(x - y) = -1$, звідси $x - y = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Виразимо x через y : $x = \pi + 2\pi k + y$.

Підставимо отриманий вираз відносно x у перше рівняння останньої системи:

$$-\cos^2 y = -\sin^2 y, \quad \cos^2 y - \sin^2 y = 0, \quad \cos 2y = 0,$$

$$2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{5\pi}{4} + \pi \left(2k + \frac{n}{2} \right).$$

При знайдених значеннях x і y $\cos x \neq 0$ і $\sin x \neq 0$.

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{5\pi}{4} + \pi \left(2k + \frac{n}{2} \right); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 8.** Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sin^2(y - 3x) = 4 \sin^6 x, \\ \cos^2(y - 3x) = 4 \cos^6 x; \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо перше і друге рівняння системи:

$$1 = 4 \sin^6 x + 4 \cos^6 x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4},$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4},$$

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin^2 2x = 1, \quad \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1, \quad \cos 4x = -1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Перемножимо перше і друге рівняння даної системи:

$$\sin^2(y - 3x) \cos^2(y - 3x) = 16 \sin^6 x \cos^6 x,$$

$$4 \sin^2(y - 3x) \cos^2(y - 3x) = 64 \sin^6 x \cos^6 x,$$

$$\sin^2(2y - 6x) = (4 \sin^3 x \cos^3 x)^2,$$

$$\left| \frac{1}{2} \sin 2(y - 3x) \right| = |4 \sin^3 x \cos^3 x|,$$

$$|\sin 2(y - 3x)| = |\sin^3 2x|, \quad \sin 2(y - 3x) = \pm 1,$$

$$y - 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$y = \pi + \frac{\pi(n + k)}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \pi + \frac{\pi(n + k)}{2} \right) \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ 2 \cos x \cos y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2, \\ \cos x \cos y = 0,5. \end{cases}$

Перемноживши перше й друге рівняння системи, отримаємо: $\sin(x+y) = 1$,

$$x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{звідси } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - x.$$

Підставимо вираз для (y) у друге рівняння системи:

$$\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - x\right) = 0,5, \quad \cos x \sin x = 0,5, \quad \sin 2x = 1,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Тоді } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \frac{\pi}{4} - \pi n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi(2k - n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi(2k - n)\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

IV. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

Нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь дозволяють поєднувати різні методи розв'язування систем. До нестандартних методів розв'язування систем тригонометричних рівнянь можна віднести:

- 1) піднесення одного чи обох рівнянь до квадрата і переході до системи-наслідку, можна розв'язати одним із уже відомих способів;
- 2) застосування заміни змінних;
- 3) застосування формул перетворення добутку в суму чи суми в добуток до певного рівняння системи;
- 4) геометрична інтерпретація рівнянь системи (побудова графіків рівнянь для оцінки наявності розв'язків чи їхньої кількості);
- 5) оцінка лівої й правої частин рівнянь, що входять до системи;
- 6) використання властивостей функцій (монотонності, знакосталості, парності, періодичності тощо).

Ілюстративні приклади

10. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5 \cos x - \cos y = 3 \\ 2 \sin x \sin(y-x) + \cos y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Для другого рівняння системи використаємо формулу перетворення добутку синусів у суму:

$$\cos(2x-y) - \cos y + \cos y = 1, \quad \cos(2x-y) = 1, \quad 2x-y = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y = 2x - 2\pi n.$$

Підставимо вираз для (y) у перше рівняння системи:

$$5 \cos x - \cos 2x = 3, \quad 5 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) = 3, \quad 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

Звідки отримуємо, що $\cos x = \frac{1}{2}$ або $\cos x = 2$.

1) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = 2$ — рівняння коренів не має.

Оскільки $y = 2x - 2\pi n$, то: $y = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k - 2\pi n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k - 2\pi n \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin y = 3 \sin x, \\ \cos y + 2 \cos x = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо систему у вигляді: $\begin{cases} \sin y = 3 \sin x, \\ \cos y = 1 - 2 \cos x. \end{cases}$

Піднесемо обидва рівняння системи до квадрата й знайдемо їхню суму:

$$\begin{cases} \sin^2 y = 9 \sin^2 x, \\ \cos^2 y = 1 - 4 \cos x + 4 \cos^2 x; \end{cases}$$

$$1 = 9 \sin^2 x + 1 - 4 \cos x + 4 \cos^2 x, \quad 9 - 9 \cos^2 x - 4 \cos x + 4 \cos^2 x = 0,$$

$$5 \cos^2 x + 4 \cos x - 9 = 0.$$

Тоді: $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{9}{5}$.

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = -\frac{9}{5}$, рівняння коренів не має.

Підставимо $\cos x = 1$ у друге рівняння системи: $\cos y = -1$, $y = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки були використані нерівносильні перетворення, тобто піднесення до квадрата, то зробимо перевірку отриманих розв'язків:

1) $\sin(\pi + 2\pi k) = 0$, $3 \sin(2\pi k) = 0$.

2) Оскільки $\cos x = 1$ і $\cos y = -1$, то друге рівняння також є правильною рівністю.

Отже, сторонніх коренів немає.

Відповідь. $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Розв'язання. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}},$

Нехай $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = a$, $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = b$, тоді

$$\begin{cases} a + b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} = 2\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

З другого рівняння останньої системи $3(ab)^2 + 8ab - 3 = 0$, звідки
$$\begin{cases} ab = \frac{1}{3}, \\ ab = -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a+b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ ab = \frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ ab = -3. \end{cases} \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему сукупності:
$$\begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}} - b, \\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - b \right) b = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}b - b^2 = \frac{1}{3}, \quad 3b^2 - 2\sqrt{3}b + 1 = 0, \quad (\sqrt{3}b - 1)^2 = 0, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Розв'яжемо другу систему сукупності:
$$\begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}} - b, \\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - b \right) b = -3. \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}b - b^2 = -3, \quad 3b^2 - 2\sqrt{3}b - 9 = 0, \quad D = 12 + 4 \cdot 3 \cdot 9 = 120,$$

$$b_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{10})}{3} = \frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}},$$

$$b_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{10})}{3} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}},$$

Звідки $x = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad y = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$

або $x = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad y = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi q, \quad q \in \mathbb{Z}$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi m; 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi l \right),$

$\left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi p; 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \right) + 2\pi q \right), \quad n, k, m, l, p, q \in \mathbb{Z}.$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–9 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Два генератори створюють гармонічні коливання з однаковими частотами, але з різними фазами, які описуються рівняннями $f_1(t) = \sin(80\pi t + \alpha)$ і $f_2(t) = \sin(80\pi t + \beta)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ — функції гармонічних коливань (у нанометрах, 10^{-9} м), t — час (у секундах), α і β — фази коливань. Якими мають бути фази цих коливань, щоб у момент часу $t = \frac{1}{80}$ с від початку коливання сума зміщень

дорівнювала б 1 нм, а в момент часу $t = \frac{1}{160}$ с — становила би $\sqrt{3}$ нм?

Розв'язання. Розглянемо гармонічне коливання:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin(80\pi t + \alpha) + \sin(80\pi t + \beta).$$

За умовою, $f\left(\frac{1}{80}\right) = 1$, $f\left(\frac{1}{160}\right) = \sqrt{3}$, тобто

$$\sin(\pi + \alpha) + \sin(\pi + \beta) = 1 \text{ і } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \sqrt{3}.$$

$$\text{Маємо систему рівнянь: } \begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = -1, \\ \cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Використаємо формули суми синусів та суми косинусів: } \begin{cases} 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -1, \\ 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \alpha + \beta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{3} - \beta + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді із першого рівняння системи:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \beta + 2\pi n\right) + \sin \beta = -1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) - \sin \beta = 1.$$

Запишемо різницю синусів як добуток виразів:

$$2 \sin \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) = 1, \quad \frac{\pi}{6} + \beta = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Оскільки } \alpha = -\frac{\pi}{3} - \beta + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ то: } \alpha = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - 2\pi k + 2\pi n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(n - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi(n - k); -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2. Конкурсна задача. Нехай α, β, γ — кути трикутника. Відомо, що $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$,

$\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ — послідовні натуральні числа. Знайдіть кути α, β, γ .

Розв'язання. За умовою, для деякого натурального n виконуються рівності

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = n, \\ \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = n + 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = n + 2. \end{cases}$$

Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то один із кутів, наприклад γ , можна виразити через інші кути. У результаті одержимо систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = n, \\ \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = n + 1, \\ \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = n + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{n}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{n + 1}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = n + 2. \end{cases}$$

Перепишемо третє рівняння системи, за формулою тангенса суми:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = n + 2.$$

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n + 1}} = n + 2,$$

Оскільки $n \in \mathbb{N}$, то останнє рівняння рівносильне такому: $n^3 + 3n^2 - n - 3 = 0$, $(n + 3)(n^2 - 1) = 0$, звідси $n = 1$.

Тоді початкові рівняння набудуть вигляду

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 3. \end{cases}$$

Звідки $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\beta}{2} = \operatorname{arcctg} 2$, $\frac{\gamma}{2} = \operatorname{arcctg} 3$.

Отже, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2 \operatorname{arcctg} 2$, $\gamma = 2 \operatorname{arcctg} 3$.

Відповідь. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2 \operatorname{arcctg} 2$, $\gamma = 2 \operatorname{arcctg} 3$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \sin y, \\ \cos^2 x = \sin x \cos y. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2 \cos x = 1 + \cos y, \\ 2 \sin x = \sin y. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1}{9}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = 0,36, \\ \sin x \sin y = 0,36. \end{cases}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{5} \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y, \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \cos y = 0,25, \\ \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 0,5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + \sin(x+y) = 1,5, \\ 3x - \sin(x+y) = 2,5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos(x-y) - 2y = -1,5, \\ 3 \cos(x-y) + y = 2,5. \end{cases}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg}(3y - 5 \cos^2 x) = 1, \\ 3y - 10 \cos^2 x = \frac{\pi}{4} - 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{ctg}(2y - \cos^2 x) = 1, \\ 6y - 15 \cos^2 x = \frac{3}{4} \pi - 1. \end{cases}$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin y \sin x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \sin y, \\ \cos^2 x = \sin x \cos y. \end{cases}$$

12. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos(x-2y) = a \cos^3 y, \\ \sin(x-2y) = a \cos^3 y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2 \sin 2x + \sin 2y = 1. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2(-2x) + (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg}(5y) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} - 1); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2(4x) + \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \operatorname{tg}(-2y) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \cos(4x) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sin^2(3x) + (4 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0,75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4 - \sqrt{3}) \sin(3x) = 2\sqrt{3} - 0,75; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos^2(6x) + (\sqrt{5} - 1) \operatorname{ctg}(-9y) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} - 1), \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5} - 1) \cos(6x) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} - 1). \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0,25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4 \cos^2 x + \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \operatorname{ctg}^4 2x + 32 \sin^2 y = 55, \\ \frac{1}{\sin^2 2x} - 4 \cos y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \left| \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2 \sin 2x = \frac{3}{4} + 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

7. Творче завдання. Розробіть веб-сторінку з методами розв'язування систем тригонометричних рівнянь та прикладами.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я розумію, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом підстановки.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я розумію, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом додавання.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 3. | Я знаю, як розв'язувати системи тригонометричних рівнянь методом множення. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю основні нестандартні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Розв'язування систем тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 2.** Застосування симетрії тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
- 3.** Застосування обернених тригонометричних функцій при розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.
- 4.** Використання методу мажоранти (міноранти) для розв'язування систем тригонометричних рівнянь.
- 5.** Системи тригонометричних рівнянь в астрономії.