

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 26. Найпростіші тригонометричні нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення найпростіших тригонометричних нерівностей;
- 2) зрозумієте загальну схему розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей;
- 3) навчитеся використовувати одиничне коло для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей;
- 4) навчитеся використовувати графіки функцій для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $\cos 3x = \sqrt{1,21}$.
2. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 5\cos x - 7 = 0$.
3. Обчисліть: $\operatorname{arctg}(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Порівняйте з нулем значення виразу $\sin\frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} \cdot \cos\frac{11\pi}{4}$.
5. Порівняйте $\operatorname{tg} 10^\circ$ і $\operatorname{tg} 70^\circ$.

III. Означення найпростіших нерівностей та загальна схема їхнього розв'язання

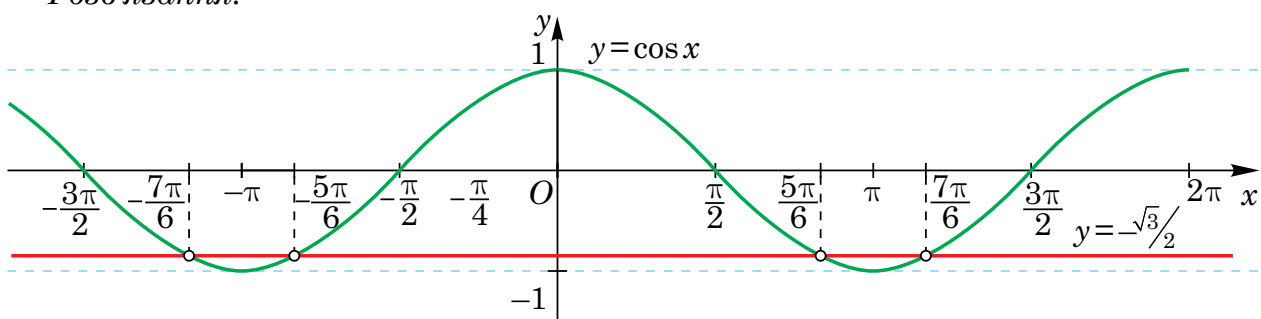
Означення. Нерівності вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, де $f(x)$ — одна з основних тригонометричних функцій ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

Існують два основних способи розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей:

- 1) використання одиничного кола й означень основних тригонометричних функцій;
- 2) використання графіків тригонометричних функцій.

Приклад 1. Укажіть розв'язки нерівності $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$ (див. рисунок).

Розв'язання.



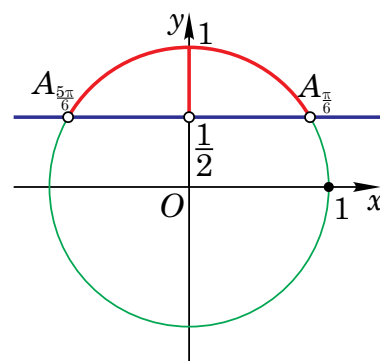
Графік функції $y = \cos x$ міститься нижче від графіка функції $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на проміжку $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Приклад 2. Укажіть усі кути з проміжку $[0; \pi]$, які задовольняють нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ (див. рисунок).

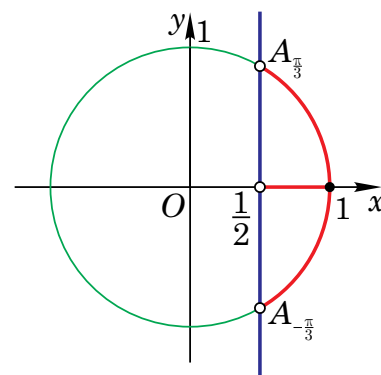
Розв'язання. Кути, що відповідають точкам одиничного кола, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і належать проміжку $[0; \pi]$, лежать в межах від $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.



IV. Використання одиничного кола для розв'язування тригонометричних нерівностей

Доцільно розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності, використовуючи одиничне коло та означення тригонометричних функцій. Наприклад, при розв'язуванні нерівності $\cos x > \frac{1}{2}$ виділяємо на одиничному колі усі точки, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$ (див. рисунок).



Далі записуємо проміжок, усі кути якого задовольняють нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$, тобто проміжок $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Проміжок за-

писуємо, «рухаючись» по колу проти руху годинникової стрілки.

Застосуємо періодичність функції $f(x) = \cos x$ і записуємо відповідь

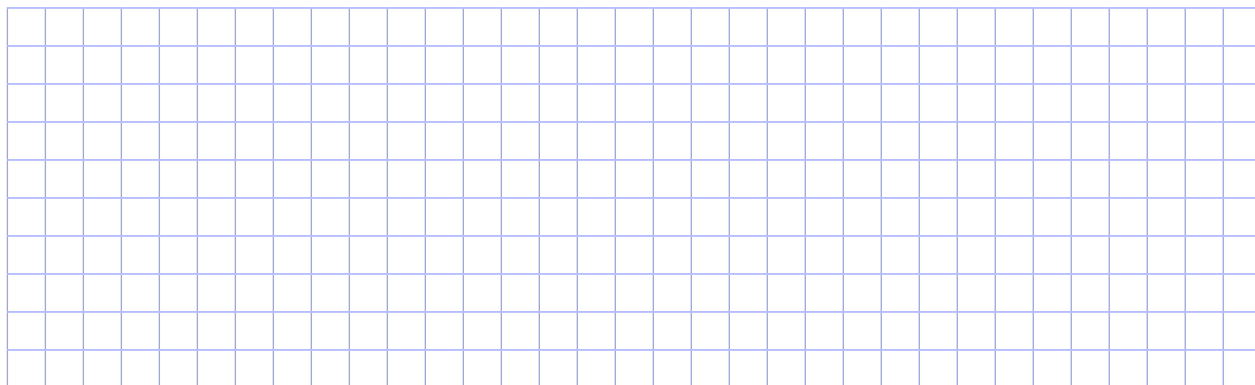
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Примітка. Відповідь до тригонометричної нерівності зручно записувати у вигляді подвійної нерівності, наприклад, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



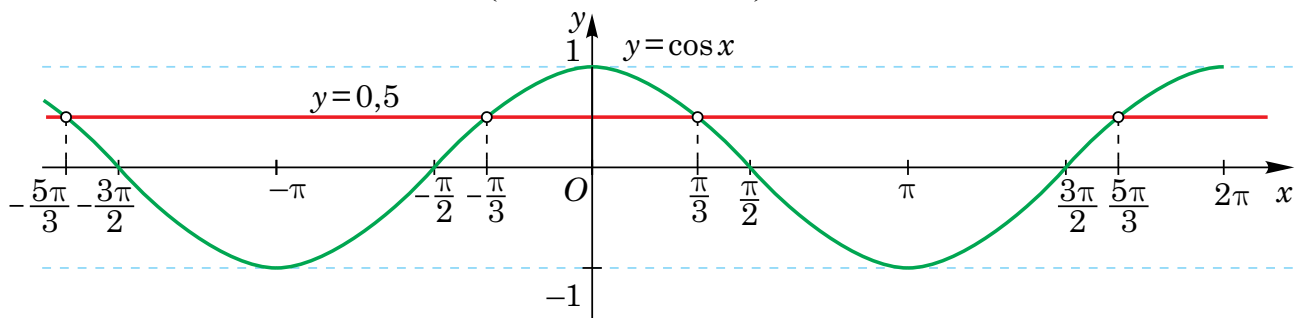
V. Використання графіків тригонометричних функцій для розв'язування тригонометричних нерівностей

Розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності можна, користуючись графічною інтерпретацією нерівностей вигляду $f(x) > g(x)$. Розв'язками нерівності є абсиси всіх точок, при яких точки графіка $f(x)$ розміщені вище за відповідні точки графіка $g(x)$.

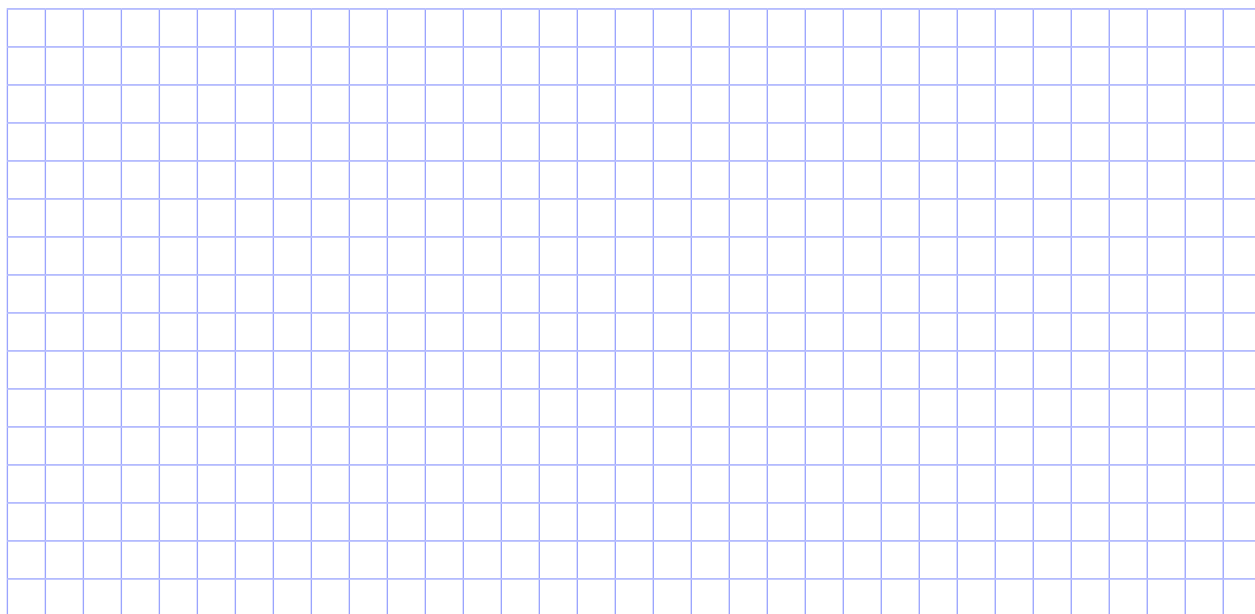
Наприклад, щоб розв'язати нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$, то можна побудувати в одній системі координат графіки функцій $f(x) = \cos x$ і $g(x) = \frac{1}{2}$ на проміжку, який дорівнює головному періоду функції $f(x) = \cos x$. Можна обрати проміжок $[-\pi; \pi]$ (див. рисунок). Визначаємо проміжок, на якому відповідні точки графіка $f(x) = \cos x$ знаходяться вище точок графіка $g(x) = \frac{1}{2}$. За рисунком, — це проміжок $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Врахуємо періодичність функції $f(x) = \cos x$, запишемо відповідь

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$



Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ графічним методом.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На блок керування певним приладом подається електричний сигнал, напруга якого змінюється за законом $U(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$, де $U(t)$ — напруга (у вольтах), а t — час (у секундах). Чутливі елементи приладу можуть вийти з ладу від перегріву, коли напруга буде більша за 3,5 В. У які моменти часу, впродовж перших 30 с від початку вимірювання, існує небезпека виходу з ладу приладу?

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть нерівність $\sin x \cdot \sin |x| \leq \frac{1}{2}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\sin x > \frac{1}{2}$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\sin x < \frac{1}{2}$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\sin x > \frac{1}{2}$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\sin x < \frac{1}{2}$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

3. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\cos x > \frac{1}{2}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\cos x < \frac{1}{2}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

4. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\cos x > \frac{1}{2}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\cos x < \frac{1}{2}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

5. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x > 1$; | 2) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\operatorname{tg} x > -1$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x > 1$; | 6) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; | 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > -1$. |

6. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x > 1$; | 2) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\operatorname{tg} x > -1$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x > 1$; | 6) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; | 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > -1$; |
| 9) $\operatorname{tg} x > 1$; | 10) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 11) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 12) $\operatorname{tg} x > -1$. |

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sin x > 1$; | 2) $\sin x > -1$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{4}$; | 4) $\sin x > \frac{1}{4}$; |
| 5) $\sin x < 1$; | 6) $\sin x < -1$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{4}$; | 8) $\sin x < \frac{1}{4}$. |

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sin x > 1$; | 2) $\sin x > -1$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{4}$; | 4) $\sin x > \frac{1}{4}$; |
| 5) $\sin x < 1$; | 6) $\sin x < -1$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{4}$; | 8) $\sin x < \frac{1}{4}$. |

3. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|-------------------|-----------------------------|------------------------------|--------------------|
| 1) $\cos x > 1$; | 2) $\cos x > \frac{1}{3}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{3}$; | 4) $\cos x > -1$; |
| 5) $\cos x < 1$; | 6) $\cos x < \frac{1}{3}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{3}$; | 8) $\cos x < -1$. |

4. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|-------------------|-----------------------------|------------------------------|--------------------|
| 1) $\cos x > 1$; | 2) $\cos x > \frac{1}{3}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{3}$; | 4) $\cos x > -1$; |
| 5) $\cos x < 1$; | 6) $\cos x < \frac{1}{3}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{3}$; | 8) $\cos x < -1$. |

5. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | |
|-----------------------------------|---|-----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x > 3$; | 2) $\operatorname{tg} x > 0$; | 3) $\operatorname{tg} x > -1,5$; |
| 4) $\operatorname{tg} x > -1,5$; | 5) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{2}$; | 6) $\operatorname{ctg} x > 5$. |

6. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|---|---------------------------------|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} x < 3$; | 2) $\operatorname{tg} x < 0$; | 3) $\operatorname{tg} x < -1,5$; | 4) $\operatorname{tg} x < -1,5$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{2}$; | 6) $\operatorname{ctg} x < 5$; | 7) $\operatorname{ctg} x < -\frac{1}{3}$; | 8) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{4}$. |

7. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|---|---------------------------------|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} x > 3$; | 2) $\operatorname{tg} x > 0$; | 3) $\operatorname{tg} x > -1,5$; | 4) $\operatorname{tg} x > -1,5$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{2}$; | 6) $\operatorname{ctg} x > 5$; | 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{3}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{4}$. |

8. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|---|---------------------------------|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} x < 3$; | 2) $\operatorname{tg} x < 0$; | 3) $\operatorname{tg} x < -1,5$; | 4) $\operatorname{tg} x < -1,5$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{2}$; | 6) $\operatorname{ctg} x < 5$; | 7) $\operatorname{ctg} x < -\frac{1}{3}$; | 8) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{4}$. |

9. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

1) $\sin 2x > 1$; 2) $\sin 4x > -1$; 3) $\sin \frac{x}{3} < -\frac{1}{4}$; 4) $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$.

10. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

1) $\sin 2x > 1$; 2) $\sin 4x > -1$; 3) $\sin \frac{x}{3} < -\frac{1}{4}$; 4) $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$.

11. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

1) $\cos 5x > 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} > \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} > -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x > -1$.

12. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

1) $\cos 5x < 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} < -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x < -1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) > 1$; 2) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{3}$; 3) $\cos\left(\frac{2x}{3} - 1\right) > -\frac{1}{3}$; 4) $\cos(3x - 2) > -1$.

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

1) $\sin 5x < 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} < -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x < -1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} 2x > 3$; 2) $\operatorname{tg} 3x > 0$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > -1,5$; 4) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} > -1,5$;
5) $\operatorname{ctg} \frac{2x}{5} > \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} 7x > 5$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{5x}{2} > -\frac{1}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{7x}{3} > \frac{1}{4}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} 2x < 3$; 2) $\operatorname{tg} 3x < 0$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < -1,5$; 4) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} < -1,5$;
5) $\operatorname{ctg} \frac{2x}{5} < \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} 7x < 5$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{5x}{2} < -\frac{1}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{7x}{3} < \frac{1}{4}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $1 - 2\sin 2x > 0$; 2) $3\operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq \sqrt{3}$; 3) $2\cos 2x + 1 < 0$; 4) $\operatorname{ctg} 3x \geq \sqrt{3}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1$; 2) $1 + 6\cos x \leq 2\sqrt{2 + 4\cos x}$.

7. Творче завдання. Розробіть комп'ютерну програму для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Рефлексія

1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....

- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Дослідження коливальних процесів за допомогою найпростіших тригонометричних нерівностей.
2. Роль тригонометричних нерівностей у проєктуванні сигналів зв'язку.
3. Тригонометричні нерівності при дослідженні амортизаторів автомобілів.
4. Найпростіші тригонометричні нерівності в задачах фізики.
5. Візуалізація розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою графічних калькуляторів.







