

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 26. Найпростіші тригонометричні нерівності

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення найпростіших нерівностей та загальна схема їхнього розв'язання.
2. Використання одиничного кола для розв'язування тригонометричних нерівностей.
3. Використання графіків тригонометричних функцій щодо розв'язування тригонометричних нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) В яких ситуаціях у фізиці чи в техніці потрібно визначати, коли значення тригонометричної функції більше або менше певного значення?

2) Чи можна застосувати тригонометричні нерівності, щоб спрогнозувати безпечний кут нахилу дороги чи певної конструкції?

3) Чи допомагають графіки тригонометричних функцій при розв'язуванні нерівностей?

4) Чи можна за допомогою тригонометричних нерівностей визначити час, коли ефективність сонячних панелей буде найбільшою?

5) Чи можна візуалізувати розв'язки тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного кола?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\cos 3x = \sqrt{1,21}$.

Відповідь. Коренів немає.

2. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 5\cos x - 7 = 0$.

Відповідь. $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Обчисліть: $\arctg(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{3}$.

4. Порівняйте з нулем значення виразу $\sin \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{11\pi}{4}$.

Відповідь. $\sin \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{11\pi}{4} > 0$.

5. Порівняйте $\operatorname{tg} 10^\circ$ і $\operatorname{tg} 70^\circ$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 10^\circ < \operatorname{tg} 70^\circ$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На блок керування певним приладом подається електричний сигнал, напруга якого змінюється за законом $U(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$, де $U(t)$ — напруга (у вольтах), а t — час (у секундах). Чутливі елементи приладу можуть вийти з ладу від перегріву, коли напруга буде більша за 3,5 В. У які моменти часу, впродовж перших 30 с від початку вимірювання, існує небезпека виходу з ладу приладу?

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть нерівність $\sin x \cdot \sin |x| \leq \frac{1}{2}$.

III. Означення найпростіших нерівностей та загальна схема їхнього розв'язання

Означення. Нерівності вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, де $f(x)$ — одна з основних тригонометричних функцій ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

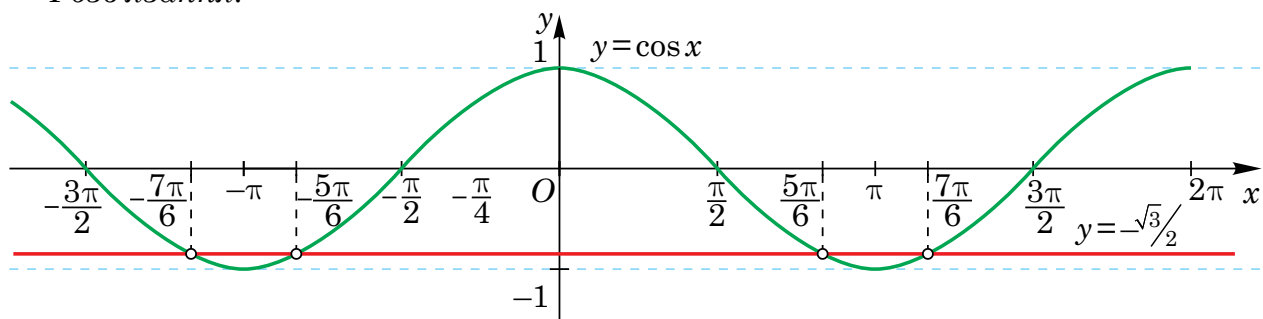
Існують два основних способи розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей:

- 1) використання одиничного кола й означень основних тригонометричних функцій;
- 2) використання графіків тригонометричних функцій.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Укажіть розв'язки нерівності $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$ (див. рисунок).

Розв'язання.



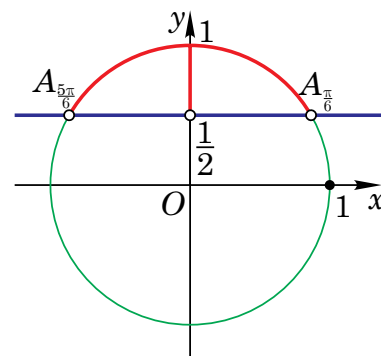
Графік функції $y = \cos x$ міститься нижче від графіка функції $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на проміжку $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$.

7. Укажіть усі кути з проміжку $[0; \pi]$, які задовольняють нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ (див. рисунок).

Розв'язання. Кути, що відповідають точкам одиничного кола, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і належать проміжку $[0; \pi]$, лежать в межах від $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.



IV. Використання одиничного кола для розв'язування тригонометричних нерівностей

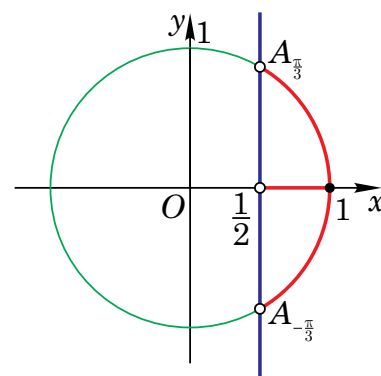
Доцільно розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності, використовуючи одиничне коло та означення тригонометричних функцій. Наприклад, при розв'язуванні нерівності $\cos x > \frac{1}{2}$ виділяємо на одиничному колі усі точки, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$ (див. рисунок).

Далі записуємо проміжок, усі кути якого задовольняють нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$, тобто проміжок $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Проміжок за-

писуємо, «рухаючись» по колу проти руху годинникової стрілки.

Застосуємо періодичність функції $f(x) = \cos x$ і записуємо відповідь

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$



Примітка. Відповідь до тригонометричної нерівності зручно записувати у вигляді подвійної нерівності, наприклад, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

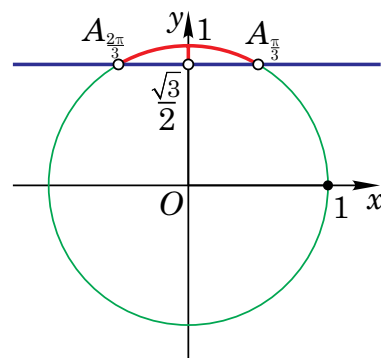
- 8.** Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Врахуємо означення синуса й виділимо на одиничному колі множину точок, ординати яких більші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (див. рисунок).

Використовуючи періодичність функції $f(x) = \sin x$, запишемо розв'язки:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

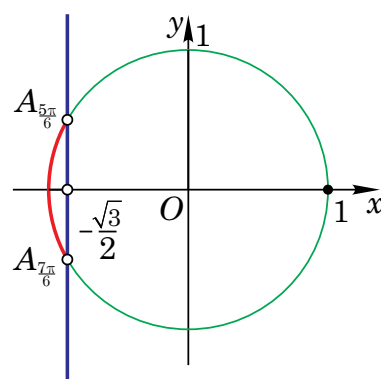


- 9.** Розв'яжіть нерівність $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Врахуємо означення косинуса й виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (див. рисунок).

Використовуючи періодичність функції $f(x) = \cos x$, запишемо розв'язки: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

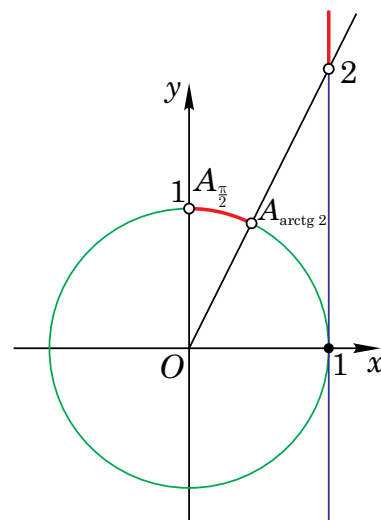


- 10.** Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x > 2$.

Розв'язання. Врахуємо означення тангенса й виділимо на одиничному колі множину кутів, тангенси яких більші за 2 (див. рисунок).

Використовуючи періодичність функції $f(x) = \operatorname{tg} x$, запишемо розв'язки: $\arctg 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь. $\arctg 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$



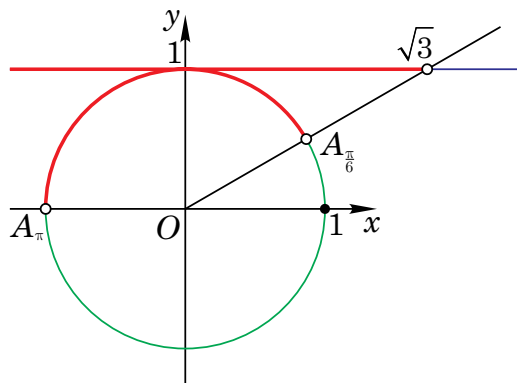
11. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

Розв'язання. Врахуємо означення котангенса й виділимо на одиничному колі множину кутів, котангенс яких менші від $\sqrt{3}$ (див. рисунок).

Використовуючи періодичність функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$, запишемо розв'язки:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$



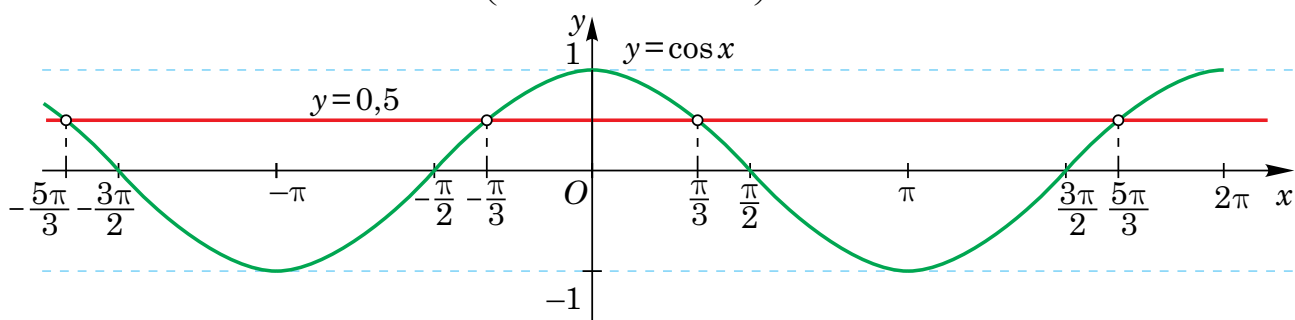
V. Використання графіків тригонометричних функцій для розв'язування тригонометричних нерівностей

Розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності можна, користуючись графічною інтерпретацією нерівностей вигляду $f(x) > g(x)$. Розв'язками нерівності є абсциси всіх точок, при яких точки графіка $f(x)$ розміщені вище за відповідні точки графіка $g(x)$.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$, то можна побудувати в одній системі координат графіки функцій $f(x) = \cos x$ і $g(x) = \frac{1}{2}$ на проміжку, який дорівнює головному періоду функції $f(x) = \cos x$. Можна обрати проміжок $[-\pi; \pi]$ (див. рисунок). Визначаємо проміжок, на якому відповідні точки графіка $f(x) = \cos x$ знаходяться вище точок графіка $g(x) = \frac{1}{2}$. За рисунком, — це проміжок $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Врахуємо періодичність функції $f(x) = \cos x$, записуємо відповідь

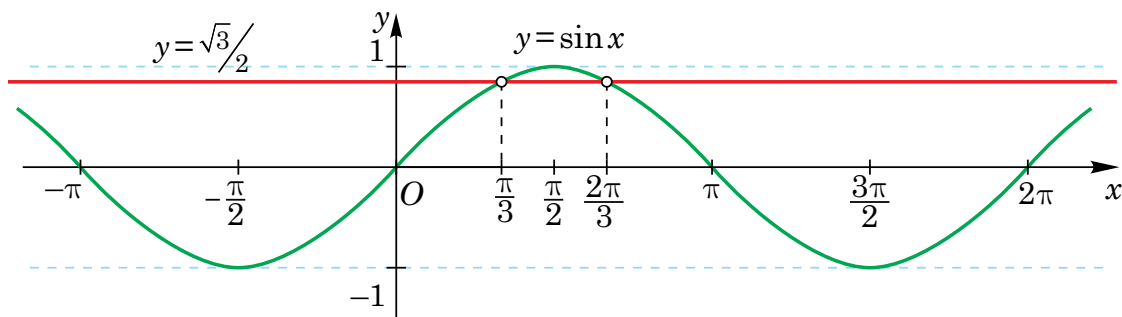
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Ілюстративні приклади

12. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ графічним методом.

Розв'язання. В одній системі побудуємо графіки функцій $f(x) = \sin x$ та $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$ (див. рисунок).



Проміжок $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ належить вибраному проміжку $[0; 2\pi]$.

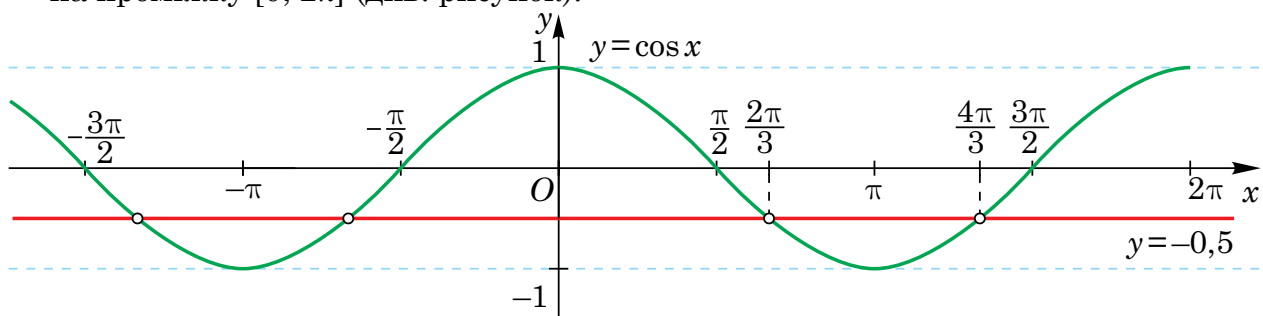
Врахувавши періодичність функції $f(x) = \sin x$, записуємо відповідь:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

- 13.** Розв'яжіть нерівність $\cos x < -\frac{1}{2}$ графічним методом.

Розв'язання. В одній системі побудуємо графіки функцій $f(x) = \cos x$ та $g(x) = -\frac{1}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$ (див. рисунок).



Проміжок $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$ належить вибраному проміжку $[0; 2\pi]$.

Врахувавши періодичність функції $f(x) = \cos x$, записуємо відповідь:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

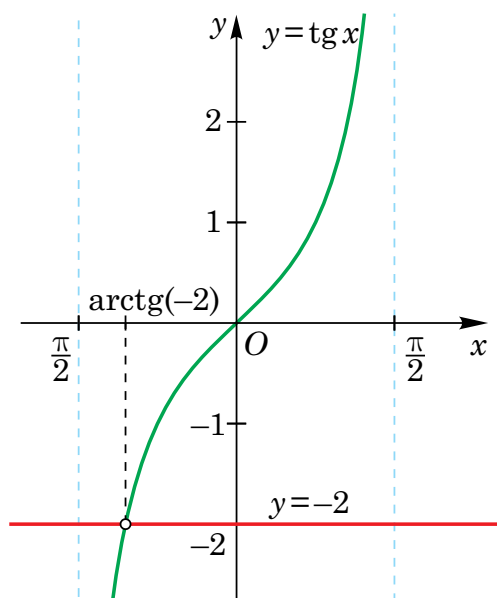
Відповідь. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

- 14.** Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x > -2$ графічним методом.

Розв'язання. В одній системі побудуємо графіки функцій $f(x) = \operatorname{tg} x$ і $g(x) = -2$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (див. рисунок).

Проміжок $\left(\arctg(-2); \frac{\pi}{2}\right)$ належить вибраному

проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$



Враховавши періодичність функції $f(x) = \operatorname{tg} x$, записуємо відповідь:

$$-\arctg(-2) + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\arctg(-2) + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

- 15.** Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ графічним методом.

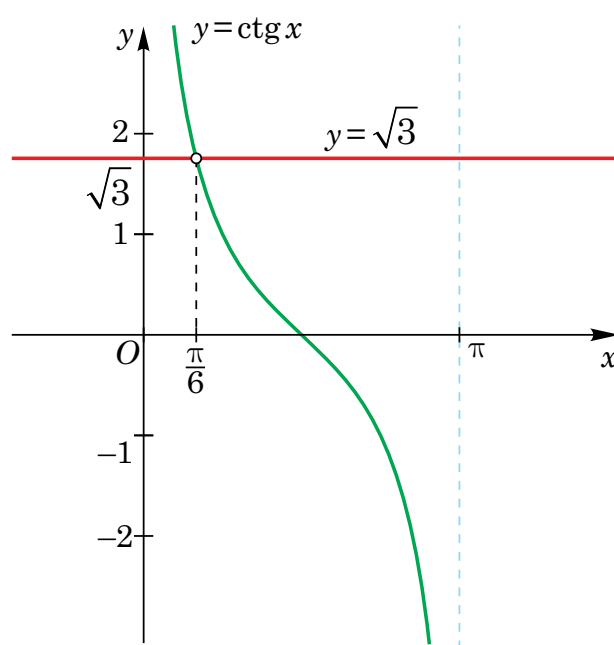
Розв'язання. В одній системі побудуємо графіки функцій $f(x) = \operatorname{ctg} x$ і $g(x) = \sqrt{3}$ на проміжку $(0; \pi)$ (див. рисунок).

Проміжок $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$ належить вибраному проміжку $(0; \pi)$.

Враховавши періодичність функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$, записуємо відповідь:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–9 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На блок керування певним приладом подається електричний сигнал, напруга якого змінюється за законом $U(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$, де $U(t)$ — напруга (у вольтах), а t — час (у секундах). Чутливі елементи приладу можуть вийти з ладу від перегріву, коли напруга буде більша за 3,5 В. У які моменти часу, впродовж перших 30 с від початку вимірювання, існує небезпека виходу з ладу приладу?

Розв'язання. За умовою задачі, розв'яжемо нерівність (див. рисунок):

$$3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2 > 3,5, \quad 3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) > 1,5, \quad \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

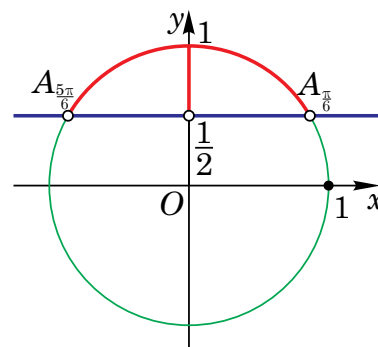
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \frac{\pi t}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{6} + 2n < \frac{t}{6} < \frac{5}{6} + 2n, n \in \mathbb{Z},$$

$$1 + 12n < t < 5 + 12n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, впродовж перших 30 с вихід із ладу приладу можливий: від 1 с до 5 с, від 13 с до 17 с, від 25 с до 29 с.

Відповідь. Від 1 с до 5 с, від 13 с до 17 с, від 25 с до 29 с.



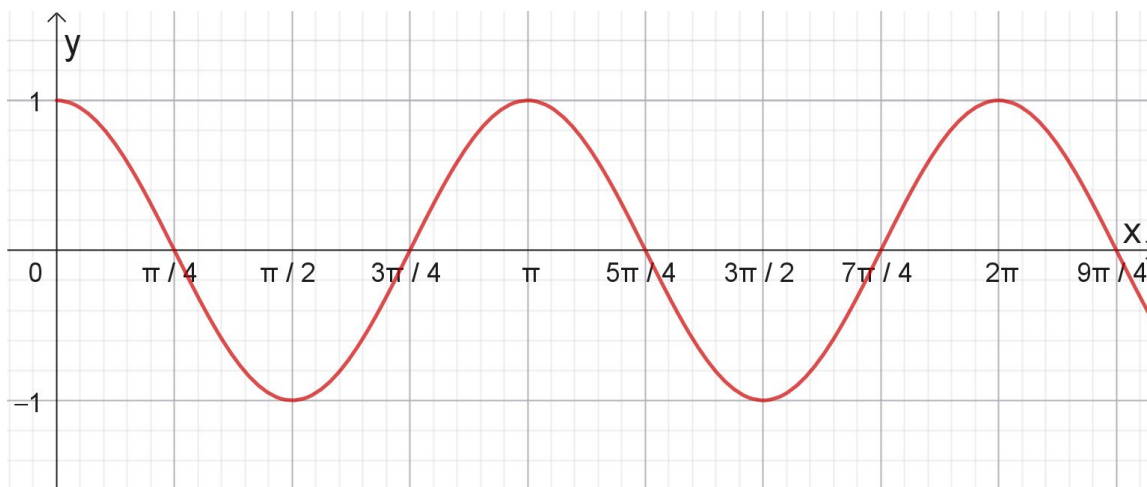
Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть нерівність $\sin x \cdot \sin |x| \leq \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sin^2 x \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{1 - \cos 2x}{2} \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \cos 2x \geq 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ -\sin^2 x \leq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \sin^2 x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $\cos 2x \geq 0$ для $x \geq 0$, за допомогою графіка (див. рисунок).



$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Врахуємо, що всі від'ємні числа також є розв'язками даної нерівності запишемо

$$\text{відповідь: } x \in \left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\sin x > \frac{1}{2}$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\sin x < \frac{1}{2}$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\sin x > \frac{1}{2}$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\sin x < \frac{1}{2}$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

3. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\cos x > \frac{1}{2}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\cos x < \frac{1}{2}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

4. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\cos x > \frac{1}{2}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{2}$; | 4) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| 5) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 6) $\cos x < \frac{1}{2}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{2}$; | 8) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |

5. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x > 1$; | 2) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\operatorname{tg} x > -1$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x > 1$; | 6) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; | 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > -1$. |

6. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|----------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} x > 1$; | 2) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 3) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\operatorname{tg} x > -1$; |
| 5) $\operatorname{ctg} x > 1$; | 6) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; | 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 8) $\operatorname{ctg} x > -1$; |
| 9) $\operatorname{tg} x > 1$; | 10) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; | 11) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 12) $\operatorname{tg} x > -1$. |

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sin x > 1$; | 2) $\sin x > -1$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{4}$; | 4) $\sin x > \frac{1}{4}$; |
| 5) $\sin x < 1$; | 6) $\sin x < -1$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{4}$; | 8) $\sin x < \frac{1}{4}$. |

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sin x > 1$; | 2) $\sin x > -1$; | 3) $\sin x > -\frac{1}{4}$; | 4) $\sin x > \frac{1}{4}$; |
| 5) $\sin x < 1$; | 6) $\sin x < -1$; | 7) $\sin x < -\frac{1}{4}$; | 8) $\sin x < \frac{1}{4}$. |

3. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- | | | | |
|-------------------|-----------------------------|------------------------------|--------------------|
| 1) $\cos x > 1$; | 2) $\cos x > \frac{1}{3}$; | 3) $\cos x > -\frac{1}{3}$; | 4) $\cos x > -1$; |
| 5) $\cos x < 1$; | 6) $\cos x < \frac{1}{3}$; | 7) $\cos x < -\frac{1}{3}$; | 8) $\cos x < -1$. |

4. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\cos x > 1$; 2) $\cos x > \frac{1}{3}$; 3) $\cos x > -\frac{1}{3}$; 4) $\cos x > -1$;
5) $\cos x < 1$; 6) $\cos x < \frac{1}{3}$; 7) $\cos x < -\frac{1}{3}$; 8) $\cos x < -1$.

5. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- 1) $\operatorname{tg} x > 3$; 2) $\operatorname{tg} x > 0$; 3) $\operatorname{tg} x > -1,5$;
4) $\operatorname{tg} x > -1,5$; 5) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x > 5$.

6. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- 1) $\operatorname{tg} x < 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 0$; 3) $\operatorname{tg} x < -1,5$; 4) $\operatorname{tg} x < -1,5$;
5) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x < 5$; 7) $\operatorname{ctg} x < -\frac{1}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{4}$.

7. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\operatorname{tg} x > 3$; 2) $\operatorname{tg} x > 0$; 3) $\operatorname{tg} x > -1,5$; 4) $\operatorname{tg} x > -1,5$;
5) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x > 5$; 7) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{4}$.

8. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\operatorname{tg} x < 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 0$; 3) $\operatorname{tg} x < -1,5$; 4) $\operatorname{tg} x < -1,5$;
5) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x < 5$; 7) $\operatorname{ctg} x < -\frac{1}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{4}$.

9. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- 1) $\sin 2x > 1$; 2) $\sin 4x > -1$; 3) $\sin \frac{x}{3} < -\frac{1}{4}$; 4) $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$.

10. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\sin 2x > 1$; 2) $\sin 4x > -1$; 3) $\sin \frac{x}{3} < -\frac{1}{4}$; 4) $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$.

11. Розв'яжіть нерівність за допомогою одиничного кола:

- 1) $\cos 5x > 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} > \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} > -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x > -1$.

12. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\cos 5x < 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} < -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x < -1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) > 1$; 2) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{3}$; 3) $\cos\left(\frac{2x}{3} - 1\right) > -\frac{1}{3}$; 4) $\cos(3x - 2) > -1$.

2. Розв'яжіть нерівність за графіком функції:

- 1) $\sin 5x < 1$; 2) $\cos \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}$; 3) $\cos \frac{2x}{3} < -\frac{1}{3}$; 4) $\cos 3x < -1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\operatorname{tg} 2x > 3$; 2) $\operatorname{tg} 3x > 0$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > -1,5$; 4) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} > -1,5$;

$$5) \operatorname{ctg} \frac{2x}{5} > \frac{1}{2}; \quad 6) \operatorname{ctg} 7x > 5; \quad 7) \operatorname{ctg} \frac{5x}{2} > -\frac{1}{3}; \quad 8) \operatorname{ctg} \frac{7x}{3} > \frac{1}{4}.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \operatorname{tg} 2x < 3; \quad 2) \operatorname{tg} 3x < 0; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{x}{2} < -1,5; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{x}{3} < -1,5;$$

$$5) \operatorname{ctg} \frac{2x}{5} < \frac{1}{2}; \quad 6) \operatorname{ctg} 7x < 5; \quad 7) \operatorname{ctg} \frac{5x}{2} < -\frac{1}{3}; \quad 8) \operatorname{ctg} \frac{7x}{3} < \frac{1}{4}.$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 1 - 2\sin 2x > 0; \quad 2) 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq \sqrt{3}; \quad 3) 2\cos 2x + 1 < 0; \quad 4) \operatorname{ctg} 3x \geq \sqrt{3}.$$

6. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1; \quad 2) 1 + 6\cos x \leq 2\sqrt{2 + 4\cos x}.$$

7. *Творче завдання.* Розробіть комп'ютерну програму для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Дослідження коливальних процесів за допомогою найпростіших тригонометричних нерівностей.
2. Роль тригонометричних нерівностей у проектуванні сигналів зв'язку.
3. Тригонометричні нерівності при дослідженні амортизаторів автомобілів.
4. Найпростіші тригонометричні нерівності в задачах фізики.
5. Візуалізація розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою графічних калькуляторів.