

# Тема 3.

## Тригонометричні рівняння й нерівності

### Урок 27. Урок–практикум. Розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

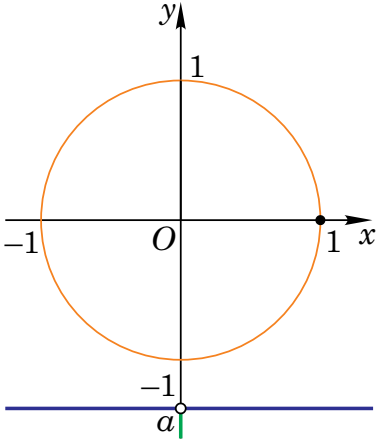
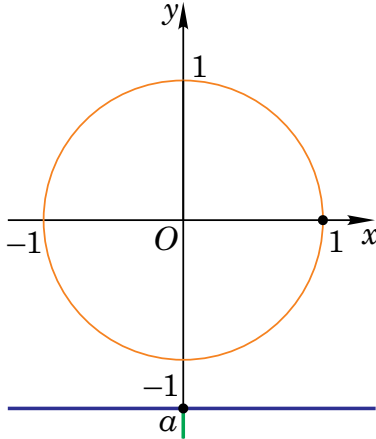
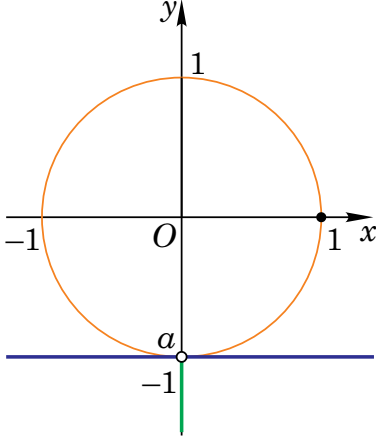
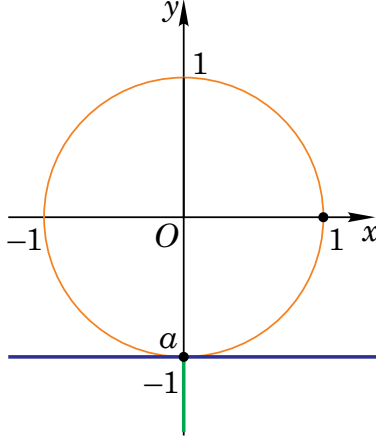
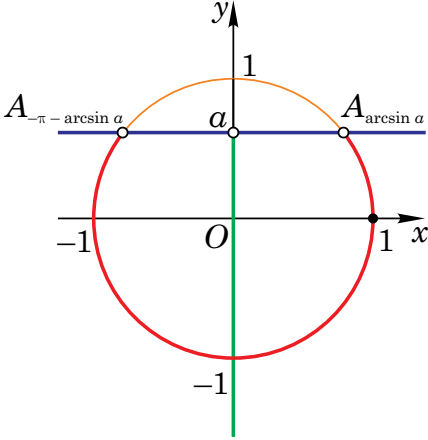
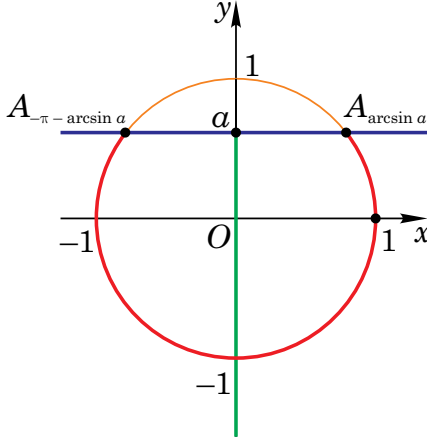
На уроці ви навчитеся:

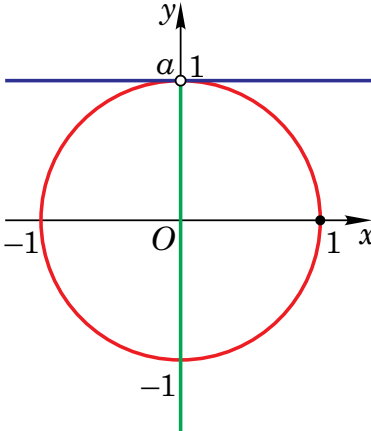
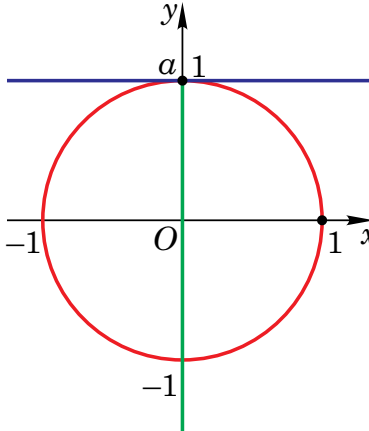
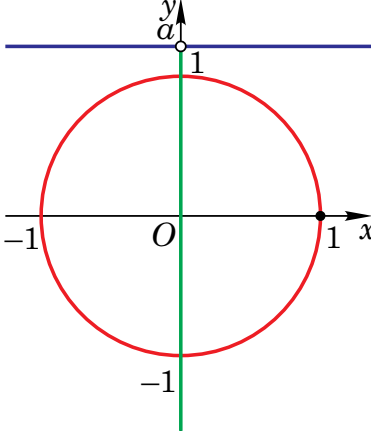
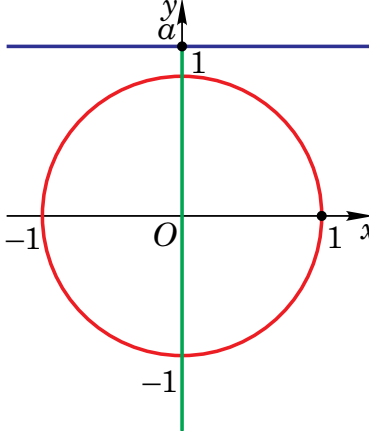
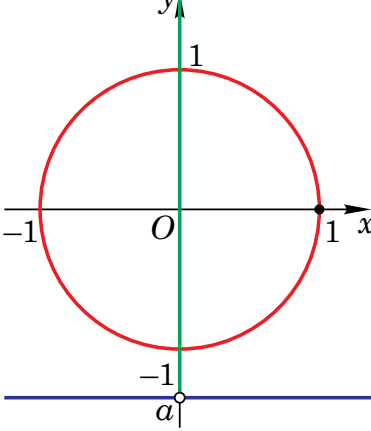
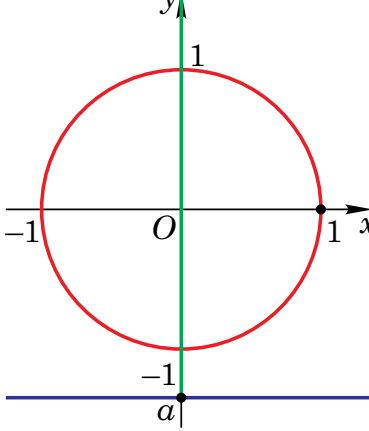
- 1) навчитеся розв’язувати нерівності виду  $\sin x > a$ ,  $\sin x \geq a$ ,  $\sin x < a$ ,  $\sin x \leq a$ ;
- 2) навчитеся розв’язувати нерівності виду  $\cos x > a$ ,  $\cos x \geq a$ ,  $\cos x < a$ ,  $\cos x \leq a$ ;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

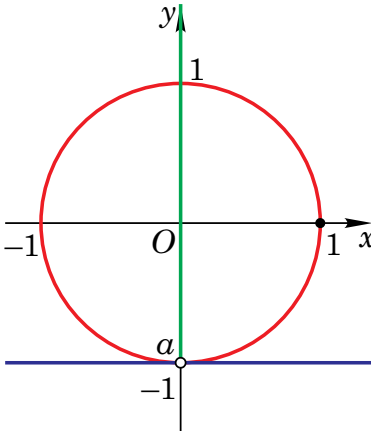
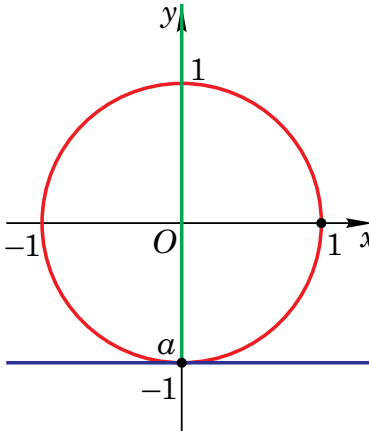
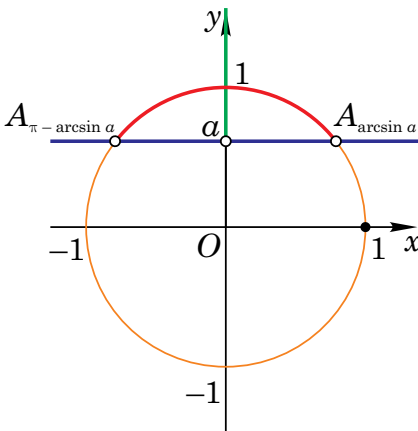
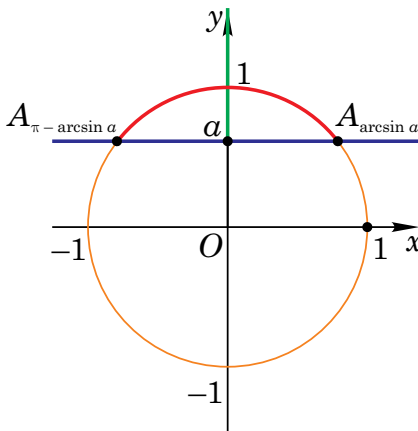
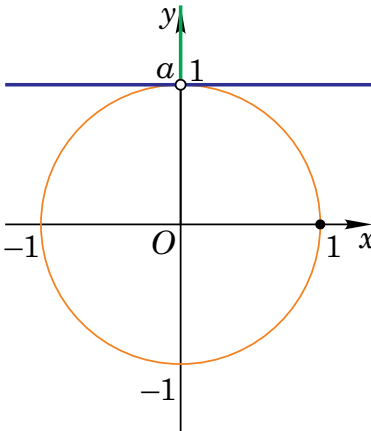
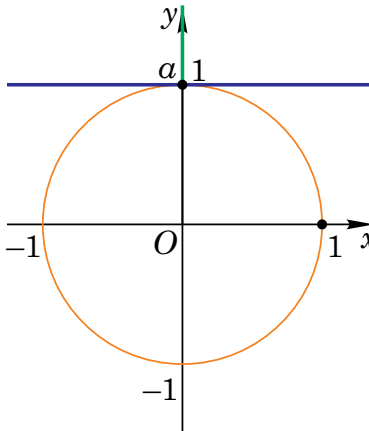
#### II. Повторення

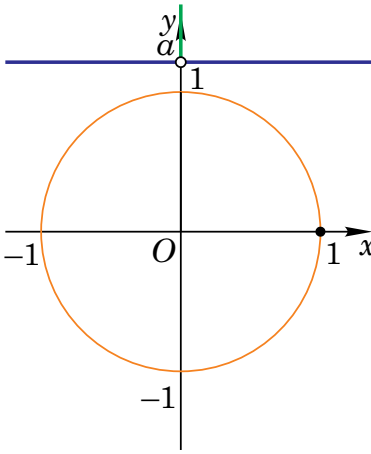
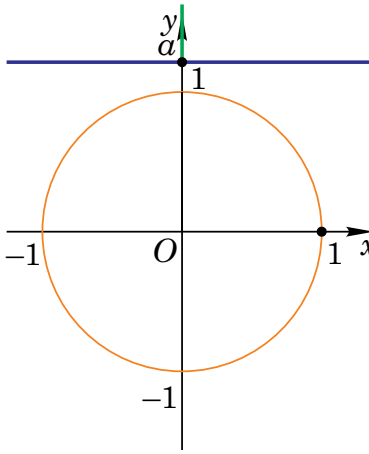
1. Спростіть вираз  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ .
2. В якій чверті лежить кут 3,2 рад?
3. Розв’яжіть рівняння  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ .
4. Укажіть номер нерівності, розв’язком якої є число  $\frac{\pi}{2}$ :
  - 1)  $\cos x > \frac{1}{2}$ ;
  - 2)  $\sin x > \frac{1}{2}$ ;
  - 3)  $\operatorname{tg} x > 1$ ;
  - 4)  $\cos x < 0$ ;
  - 5)  $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
5. При яких значеннях параметра  $a$  має розв’язки рівняння  $\sin 2x = a$ ?

### III. Розв'язування нерівностей $\sin x > a$ , $\sin x \geq a$ , $\sin x < a$ , $\sin x \leq a$

|              | Нерівність $\sin x < a$                                                                                                                                                            | Нерівність $\sin x \leq a$                                                                                                                                                          |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a < -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                         |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                         |
| $a = -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                        |  <p><math>x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                               |
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>-\pi - \arcsin a + 2\pi n &lt; x &lt; \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |

|          | Нерівність $\sin x < a$                                                                                                                                                  | Нерівність $\sin x \leq a$                                                                              |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 1$  |  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \mathbb{R}$   |
| $a > 1$  |  $x \in \mathbb{R}$                                                                    |  $x \in \mathbb{R}$  |
|          | Нерівність $\sin x > a$                                                                                                                                                  | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                              |
| $a < -1$ |  $x \in \mathbb{R}$                                                                   |  $x \in \mathbb{R}$ |

|              | Нерівність $\sin x > a$                                                                                                                                                   | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                                                                                      |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = -1$     |  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$ |  $x \in \mathbb{R}$                                                           |
| $-1 < a < 1$ |  $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                  |  $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $a = 1$      |  <p>Не має розв'язків</p>                                                              |  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                             |

|         | Нерівність $\sin x > a$                                                                                    | Нерівність $\sin x \geq a$                                                                                  |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a > 1$ |  <p>Не має розв'язків</p> |  <p>Не має розв'язків</p> |

**Приклад 1.** Розв'яжіть нерівність  $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ .

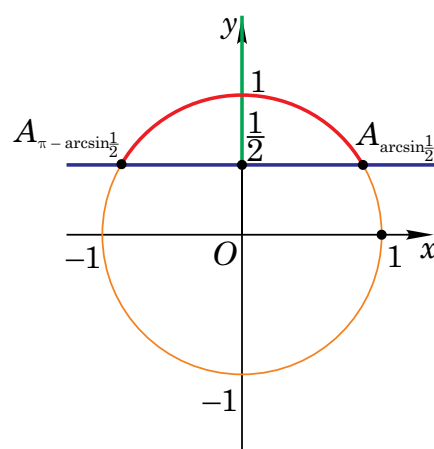
*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$\arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

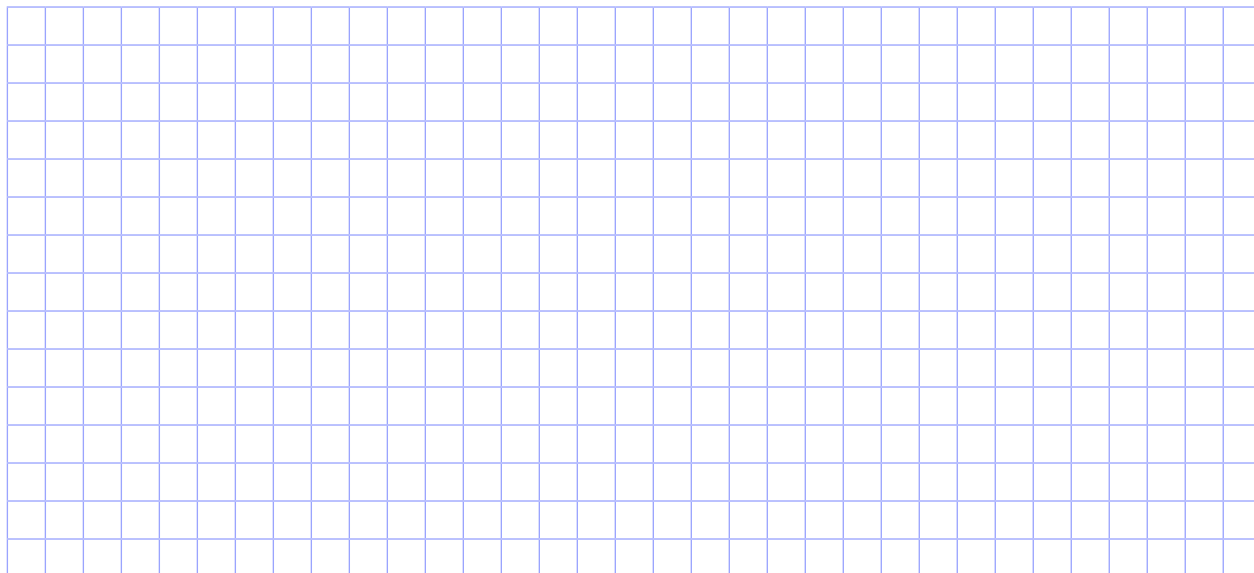
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

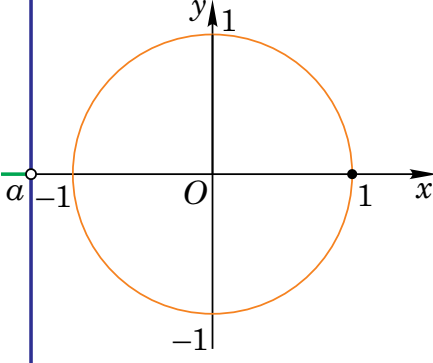
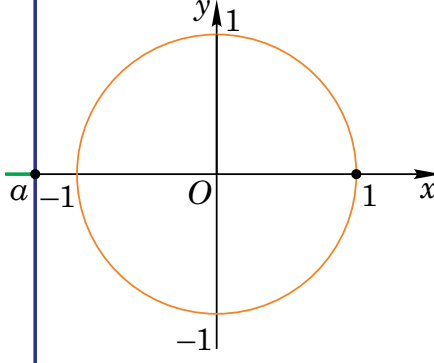
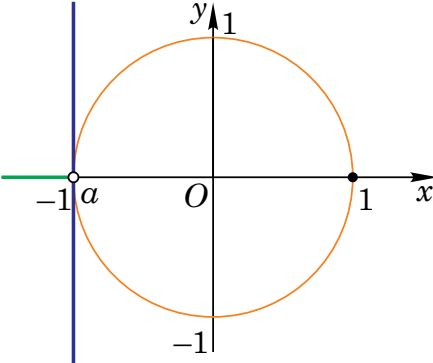
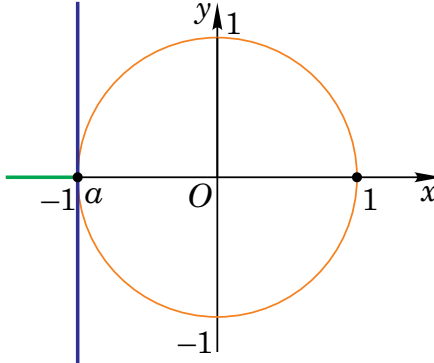
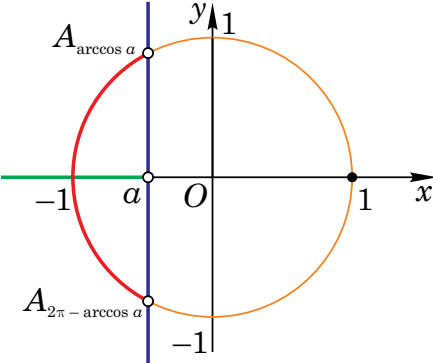
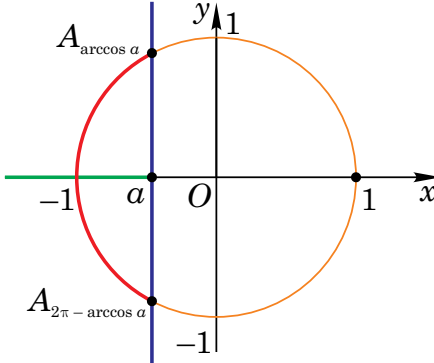
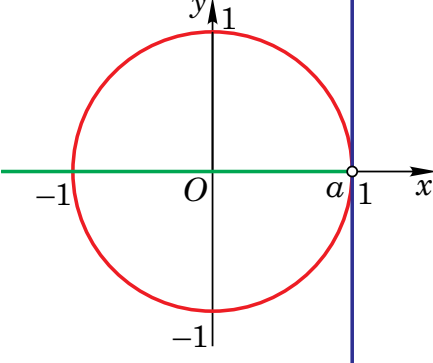
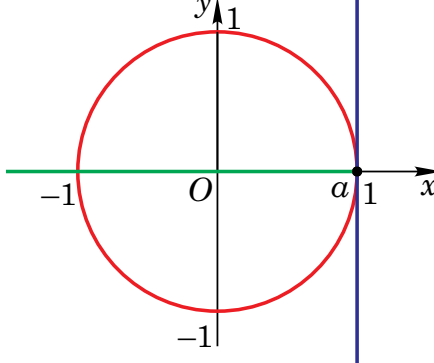
Відповідь.  $\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

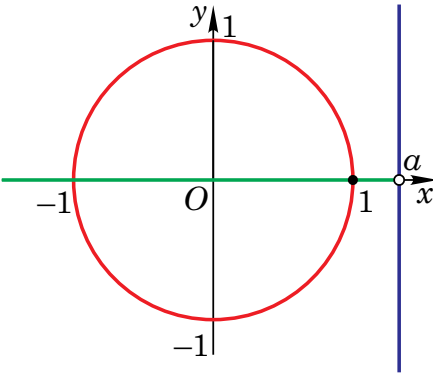
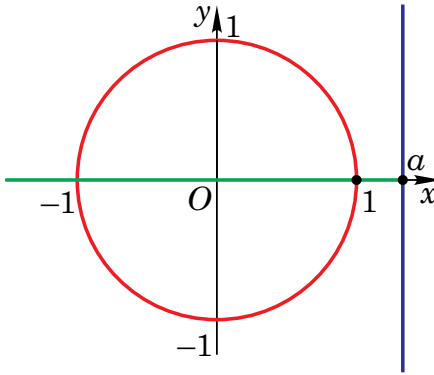
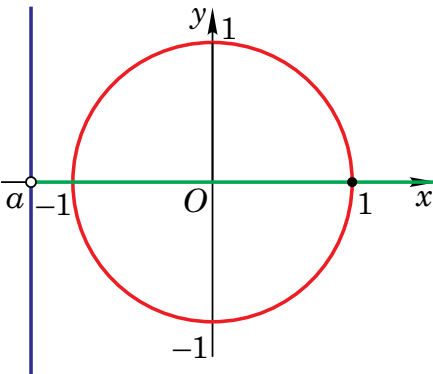
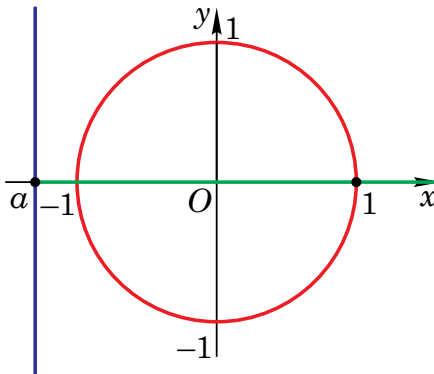
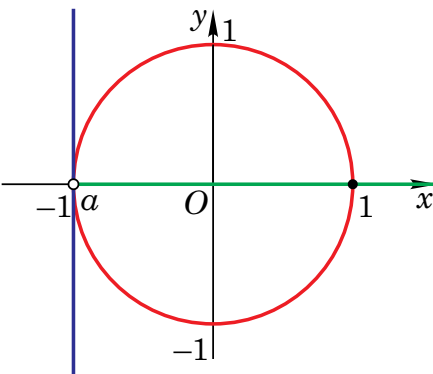
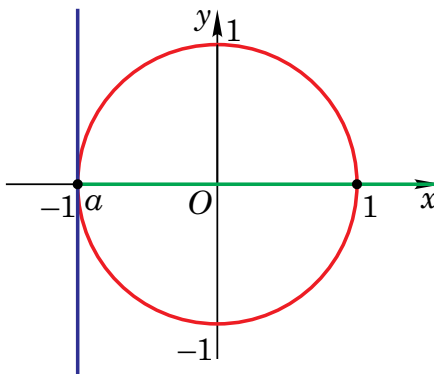
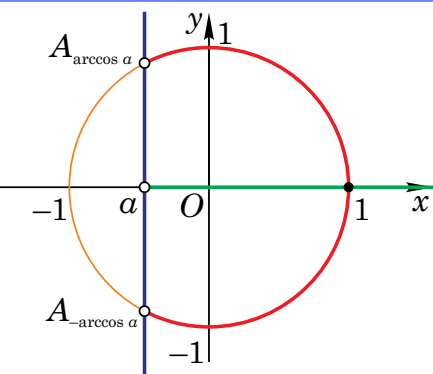
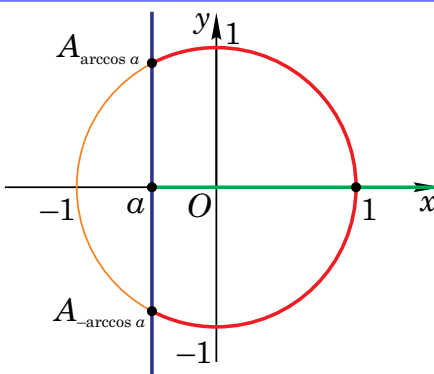


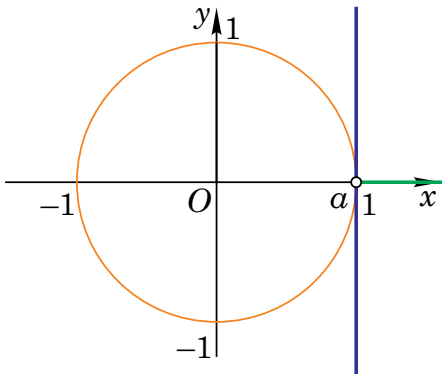
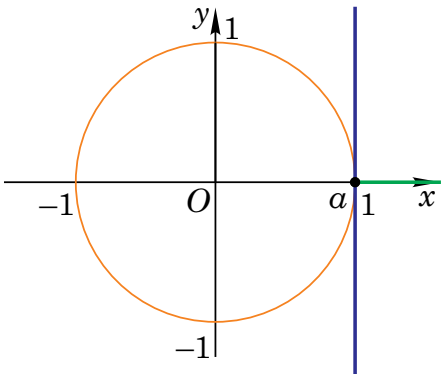
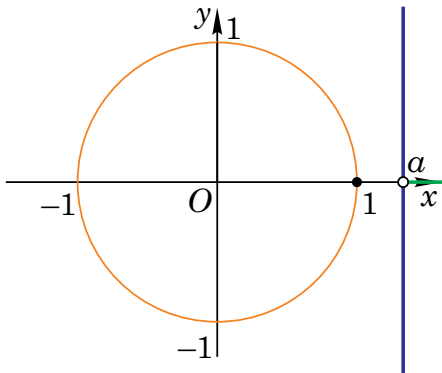
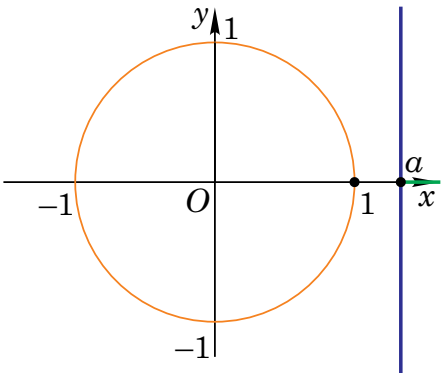
**Приклад 2.** Розв'яжіть нерівність  $\sin \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$ .



#### IV. Розв'язування нерівностей $\cos x > a$ , $\cos x \geq a$ , $\cos x < a$ , $\cos x \leq a$

|              | Нерівність $\cos x < a$                                                                                                                                                                            | Нерівність $\cos x \leq a$                                                                                                                                                                           |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a < -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                         |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                          |
| $a = -1$     |  <p>Не має розв'язків</p>                                                                                        |  <p><math>x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p>                                                           |
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>\arccos a + 2\pi n &lt; x &lt; 2\pi - \arccos a + 2\pi n</math><br/><math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n</math>,<br/><math>n \in \mathbb{Z}</math></p> |
| $a = 1$      |  <p><math>x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}</math></p>                                    |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                                            |

|              | Нерівність $\cos x < a$                                                                                                                                                      | Нерівність $\cos x \leq a$                                                                                                                                                    |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a > 1$      |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                       |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                       |
|              | Нерівність $\cos x > a$                                                                                                                                                      | Нерівність $\cos x \geq a$                                                                                                                                                    |
| $a < -1$     |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                      |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                      |
| $a = -1$     |  <p><math>x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}</math></p>        |  <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                     |
| $-1 < a < 1$ |  <p><math>-\arccos a + 2\pi n &lt; x &lt; \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |  <p><math>-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |

|         | Нерівність $\cos x > a$                                                                                    | Нерівність $\cos x \geq a$                                                                                                          |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 1$ |  <p>Не має розв'язків</p> |  <p><math>x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}</math></p> |
| $a > 1$ |  <p>Не має розв'язків</p> |  <p>Не має розв'язків</p>                         |

**Приклад 3.** Розв'яжіть нерівність  $2\cos 3x \geq \sqrt{3}$ .

*Розв'язання.* Виконаємо побудову (див. рисунок).

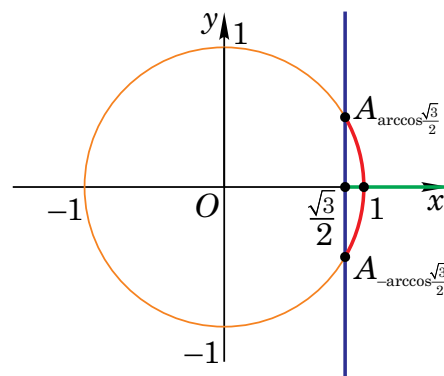
$$\cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n < 3x < \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

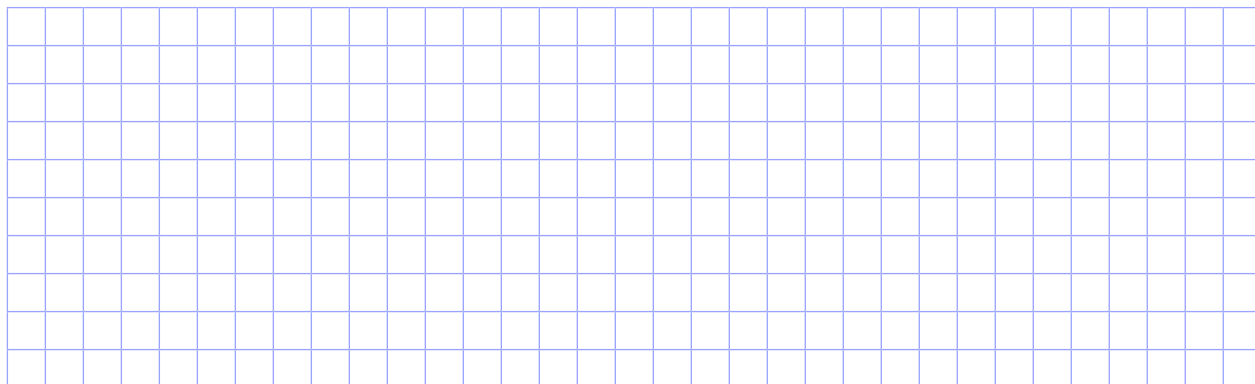
$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$



**Приклад 4.** Розв'яжіть нерівність  $2\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) < -1$ .



## V. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Під час випробовування автомобільного амортизатора на спеціальному стенді датчик фіксує вертикальне відхилення точки від положення рівноваги. Виявилося, що це відхилення описується рівнянням  $x(t) = 10 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right)$ , де  $t$  — час від початку випробування (в секундах), а  $x(t)$  — відхилення точки від положення рівноваги (в сантиметрах). Уважається, що амортизатор працює в допустимому режимі, коли відхилення від положення рівноваги за абсолютною величиною не перевищує 5 см. Знайдіть, у які моменти часу впродовж першої хвилини від початку випробування амортизатор працював у допустимому режимі.

**Задача 2. Конкурсна задача.** Розв'яжіть нерівність  $2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$ .

## VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      2)  $\sin\left(-\frac{x}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      3)  $\cos 5x > 1$ ;      4)  $\cos(-3x) > \frac{1}{3}$ .

2. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      2)  $\cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ ;      3)  $\cos \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$ ;      4)  $\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\sin 3x \geq 1$ ;      3)  $\sin \frac{x}{2} \geq 1$ ;      4)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0,2$ .

4. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos 2x \geq -1$ ;      2)  $\cos x \leq -1$ ;      3)  $\cos 2x \leq -1$ ;      4)  $2\cos x > 1$ .

5. Розв'яжіть нерівність:

1)  $2\sin(2-x) < 3$ ;      2)  $3\cos(3-3x) \geq 3$ ;

6. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin \frac{x}{2} \geq -2$ ;      2)  $\cos \frac{x}{4} \leq 2$ ;      3)  $\cos 4x < 1,5$ ;      4)  $\sin 5x > -\sqrt{2}$

### Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin(1-2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0,2$ ; 3)  $\cos(2x-2) > \frac{1}{2}$ ;      4)  $2\cos 4x + \sqrt{3} \leq 0$ ;

2. Розв'яжіть нерівність:

1)  $1 - 2\sin 2x > 0$ ;      2)  $2\cos 2x + 1 < 0$ ;      3)  $2\sin \frac{x}{2} \leq \sqrt{3}$ ;      4)  $\sqrt{2} \cos 3x \geq 1$ .

**3.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$ ;    2)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;    3)  $4\cos^2 x \leq 3$ ;    4)  $4\sin^2 x \geq 1$ .

**4.** Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = \sqrt{\sin x - 1}$ ;    2)  $y = \sqrt{1 - \cos x}$ .

**5.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ ;    2)  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ ;    3)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ ;    4)  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ .

**6.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$ ;    2)  $|\sin x| \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;    3)  $|\cos x| \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;    4)  $\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$ .

**7.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} \geq \frac{1}{3}$ ;    2)  $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 < \sin x$ ;  
3)  $\sin x \cos x > 0$ ;    4)  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x < 1$ ;

**8.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{3}{4}$ ;    2)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \sqrt{3}$ ;  
3)  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$ ;    4)  $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ .

**9.** Розв'яжіть систему нерівностей на проміжку  $[0; 2\pi]$ :

1)  $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$     2)  $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x < -\frac{1}{2}; \end{cases}$     3)  $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x < \frac{1}{2}; \end{cases}$     4)  $\begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

**10.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin(30^\circ + 3x) > \cos(60^\circ - 3x)$ ;    2)  $\sin(30^\circ + 3x) < \cos(60^\circ - 3x)$ .

**11.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $3\sin 2x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{1}{2}$ ;    2)  $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi + x\right) > \frac{1}{3}\sin(\pi - x) + 0,1$ .

**12.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leq \frac{1}{2}$ ;    2)  $\sin^4 x - \cos^4 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
3)  $\sin x \cdot \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{4}$ ;    4)  $(\sin \pi x - \cos \pi x)^2 \geq \frac{1}{2}$ .

## Рівень С

**1.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos\left(\sin x + \frac{\pi}{2}\right) < 0$ ;    2)  $|\sin x| \cos x > \frac{1}{4}$ .

**2.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x \leq -2$ ;

2)  $\cos 4x - \sin 4x \geq \sqrt{2}$ ;

3)  $\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x \geq 2\sqrt{3}$ ;

4)  $\cos 6x - \sin 6x \leq -\sqrt{2}$ .

**3.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \sin 2x - \frac{1}{2}$ ;

2)  $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{5}{8}$ ;

3)  $\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x \geq \cos 2x$ ;

4)  $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}$ .

**4.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos \pi x \cdot \sqrt{255 - 4x - 4x^2} < 0$ ;

2)  $\sin \pi x \cdot \sqrt{2 + x - x^2} > 0$ .

**5.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $|\sin x| < |\cos x|$ ;

2)  $|\sin x| > |\cos x|$ ;

3)  $|\cos x| + 3 \cos x < 1$ ;

4)  $|\sin x + \cos x| < 1$ .

**6.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $\cos(\sin x) > 0$ ;

2)  $\sin(\cos x) < 0$ .

**7. Творче завдання.** Візуалізуйте графічне розв'язування деяких нерівностей рівня В за допомогою Geogebra чи Desmos.

## Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

### Мої враження від уроку

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10     |
| Жахливі |   |   |   |   |   |   |   |   | Чудові |

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1) .....

2) .....

? .....

### Можливі теми проєктів

**1.** Аналіз руху маятника за допомогою тригонометричних нерівностей.

**2.** Тригонометричні нерівності в балістиці.

**3.** Застосування тригонометричних нерівностей у створенні дизайну атракціонів.

**4.** Біоритми людини та тригонометричні нерівності.

**5.** Застосування тригонометричних нерівностей у GPS-навігації.



