

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 27. Урок–практикум. Розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розв’язування нерівностей $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$.
2. Розв’язування нерівностей $\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об’єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв’язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв’язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв’язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна передбачити ситуацію, коли рівень води в морі перевищить визначену межу, якщо відомо, що припливи і відпливи описуються тригонометричними функціями?
- 2) Чому для проєктування акустичних систем важливо знати, при яких частотах рівень звукової хвилі перевищить певне значення?
- 3) Чи відрізняються методи розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей від методів розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь?
- 4) За допомогою якої математичної моделі можна знайти моменти часу, коли вібрація, описана за допомогою тригонометричних функцій, не перевищує критичного значення?
- 5) Чи можна передбачити момент, коли маятник, який здійснює гармонічні коливання, буде опускатися нижче певної висоти?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Відповідь. $\operatorname{tg} \alpha$.

2. В якій чверті лежить кут $3,2$ рад?

Відповідь. У третій.

3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Відповідь. $-\frac{7\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Укажіть номер нерівності, розв'язком якої є число $\frac{\pi}{2}$:

1) $\cos x > \frac{1}{2}$;

2) $\sin x > \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x > 1$;

4) $\cos x < 0$;

5) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. 2).

5. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\sin 2x = a$?

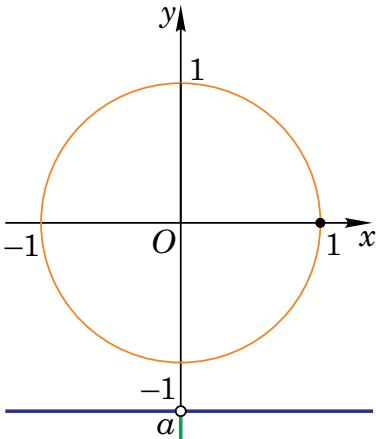
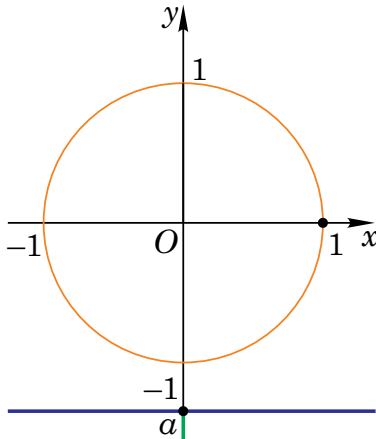
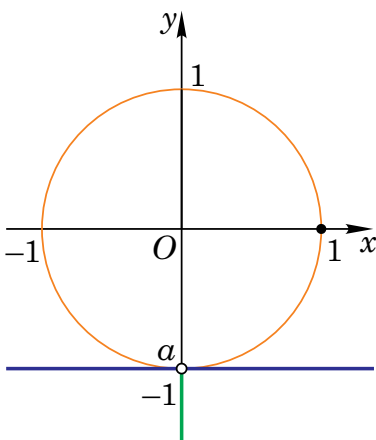
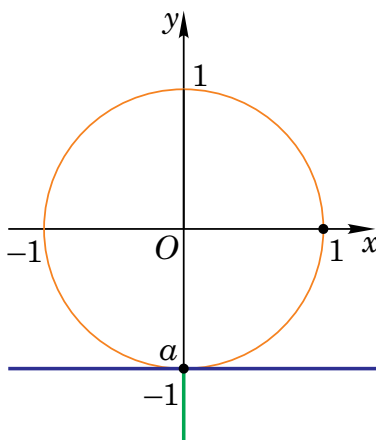
Відповідь. $[-1; 1]$.

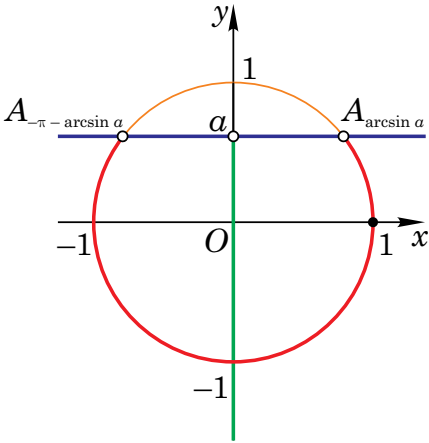
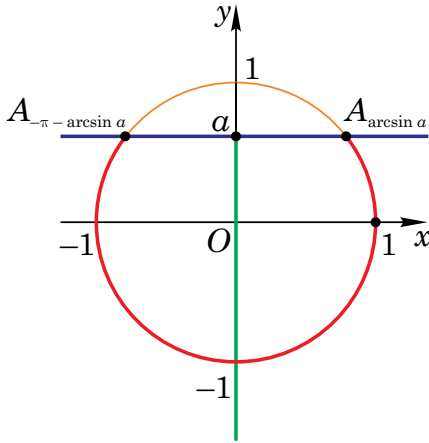
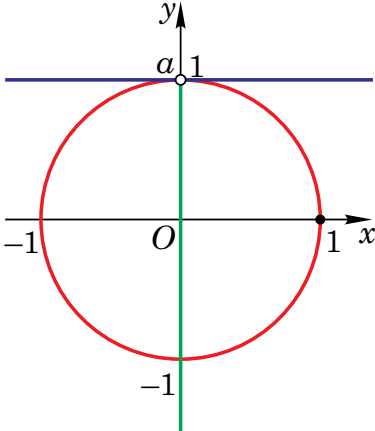
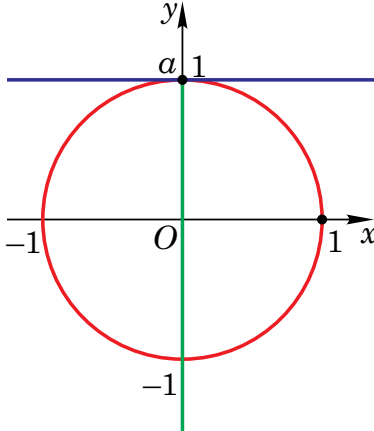
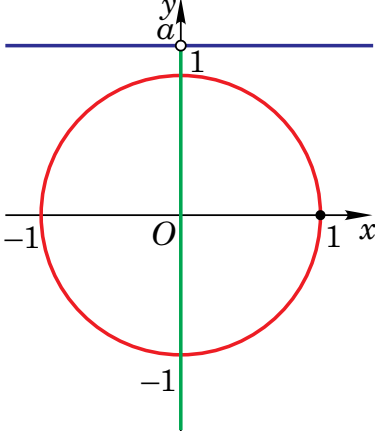
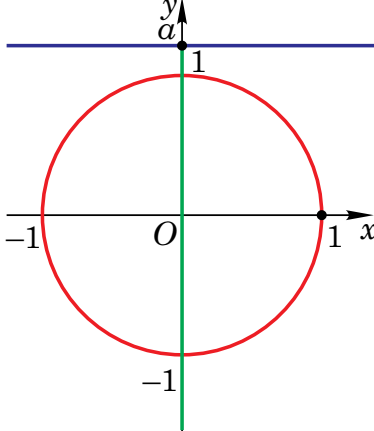
Як я вирішую певну проблему?

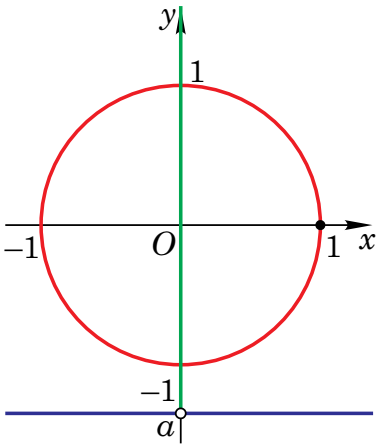
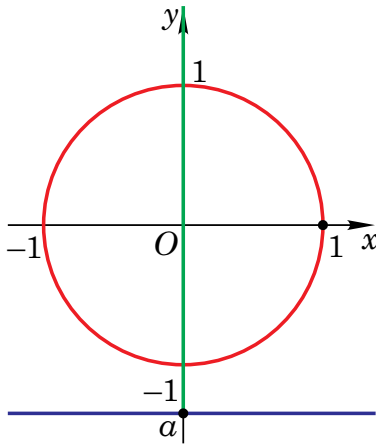
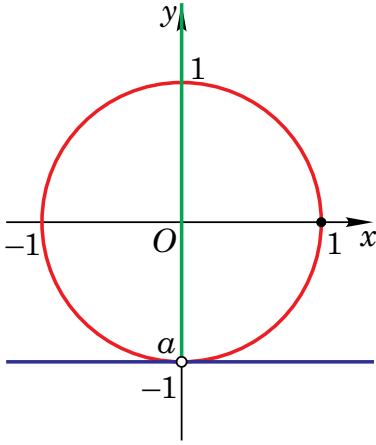
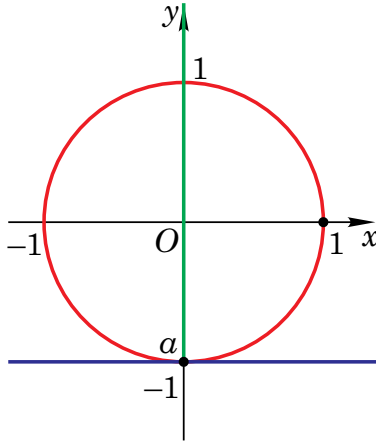
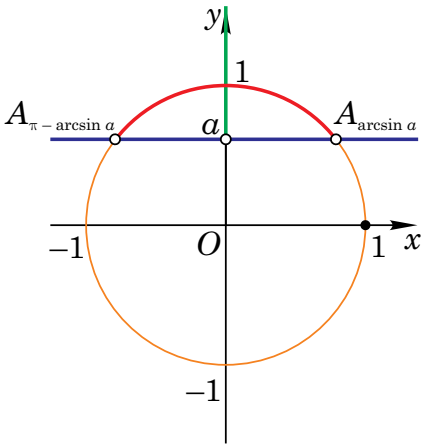
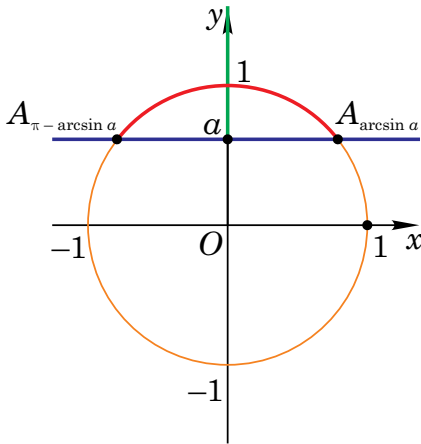
Задача. Під час випробовування автомобільного амортизатора на спеціальному стенді датчик фіксує вертикальне відхилення точки від положення рівноваги. Виявилося, що це відхилення описується рівнянням $x(t) = 10 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right)$, де t — час від початку випробування (в секундах), а $x(t)$ — відхилення точки від положення рівноваги (в сантиметрах). Уважається, що амортизатор працює в допустимому режимі, коли відхилення від положення рівноваги за абсолютною величиною не перевищує 5 см. Знайдіть, у які моменти часу впродовж першої хвилини від початку випробування амортизатор працював у допустимому режимі.

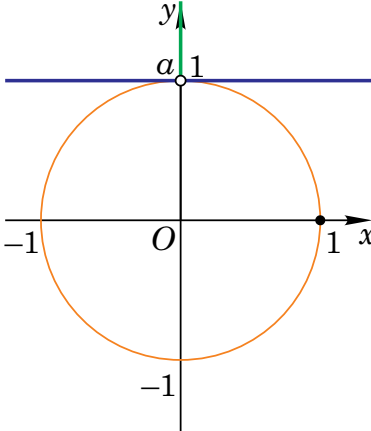
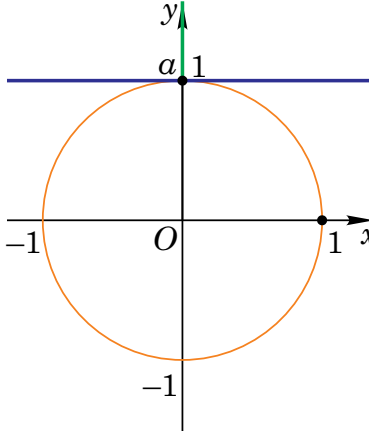
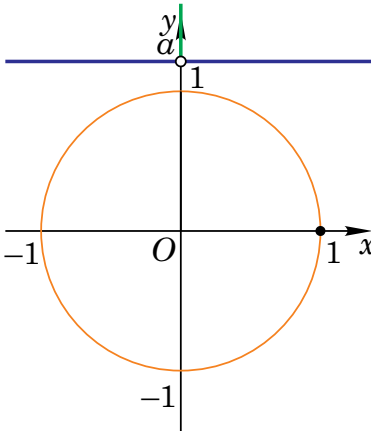
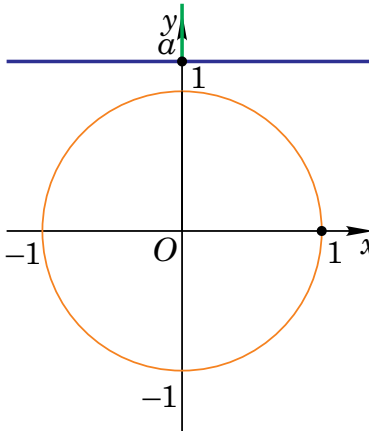
Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть нерівність $2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

III. Розв'язування нерівностей $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$

	Нерівність $\sin x < a$	Нерівність $\sin x \leq a$
$a < -1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків
$a = -1$	 Не має розв'язків	 $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

	Нерівність $\sin x < a$	Нерівність $\sin x \leq a$
$-1 < a < 1$	 $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	 $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a > 1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$

	Нерівність $\sin x > a$	Нерівність $\sin x \geq a$
$a < -1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a = -1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$-1 < a < 1$	 $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	 $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

	Нерівність $\sin x > a$	Нерівність $\sin x \geq a$
$a = 1$	 Не має розв'язків	 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$a > 1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.

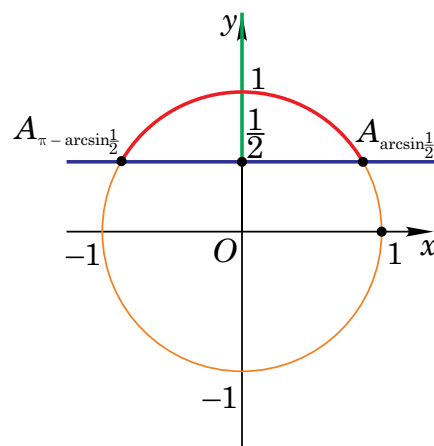
Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$\arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$



7. Розв'яжіть нерівність $\sin \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$-\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n \leq \frac{x}{3} \leq \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-3\pi - 3\arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n \leq x \leq 3\arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь.

$$-3\pi - 3\arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n \leq x \leq 3\arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

8. Розв'яжіть нерівність $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x < 0,5$.

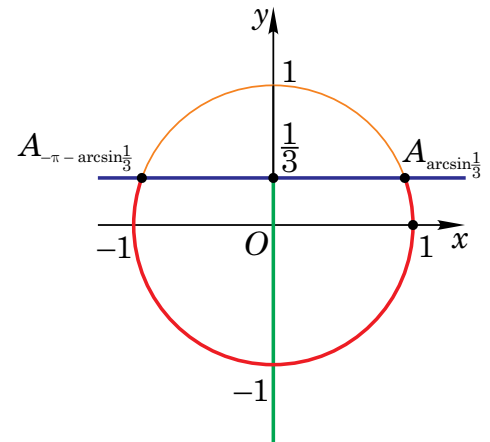
Розв'язання. $3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x < 0,5$,

$$3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x < 0,5, \quad 3\sin x - 4\sin^3 x < 0,5,$$

$$\sin 3x < 0,5, \quad \frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

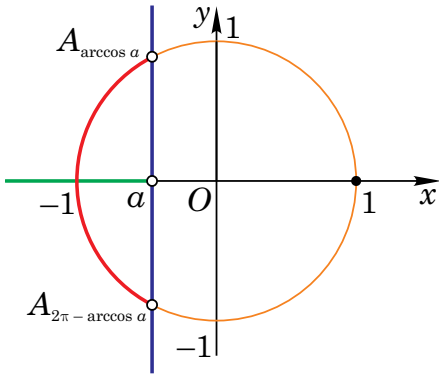
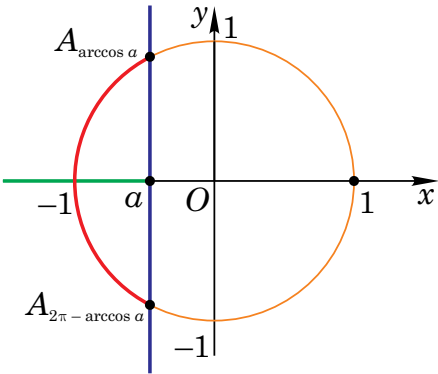
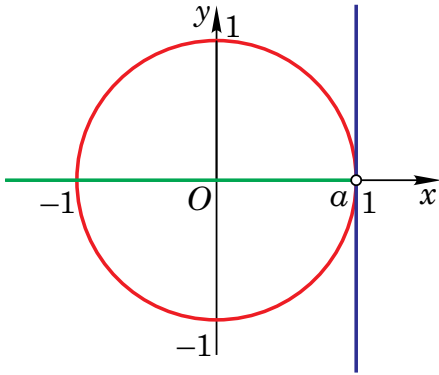
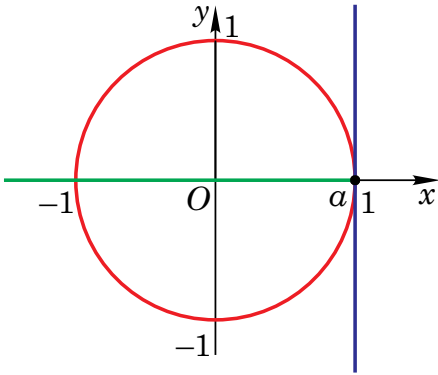
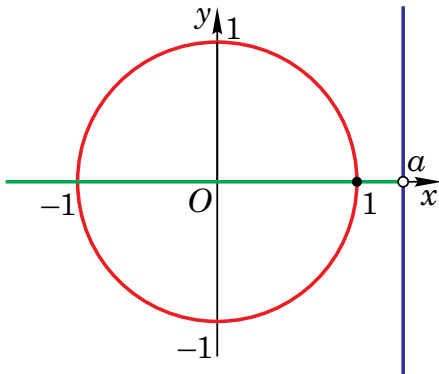
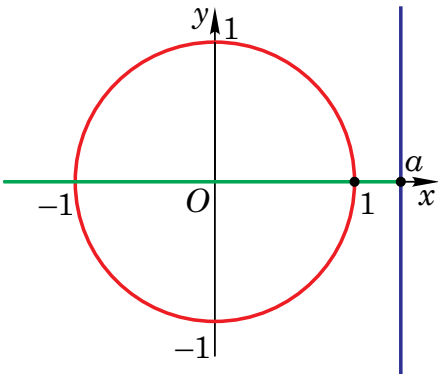
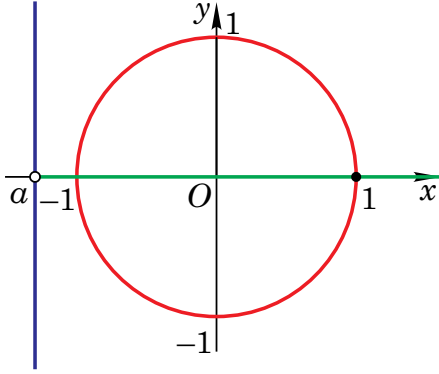
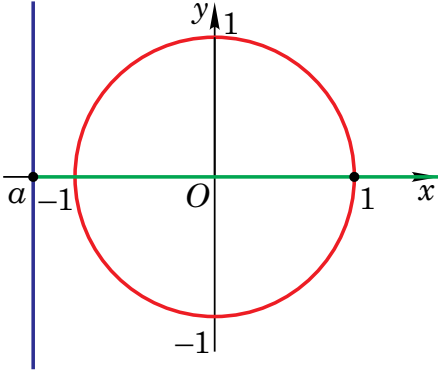
$$-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

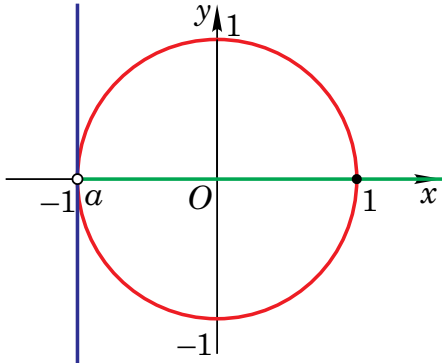
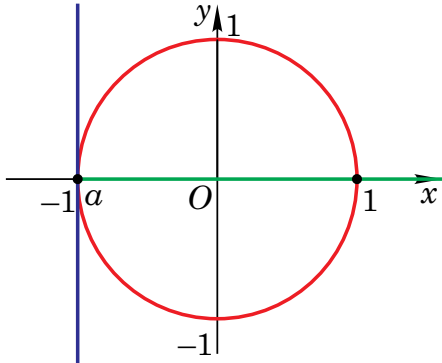
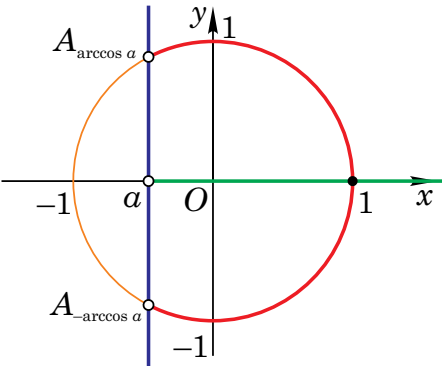
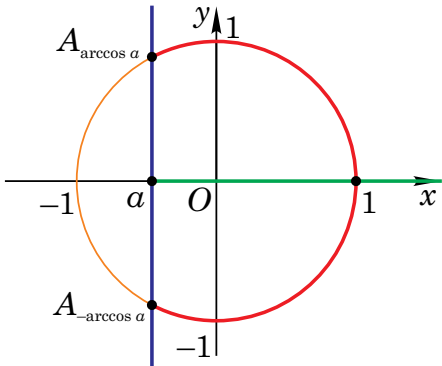
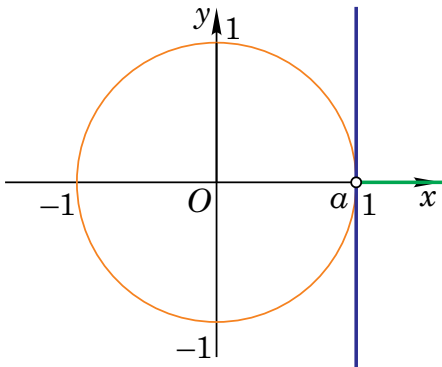
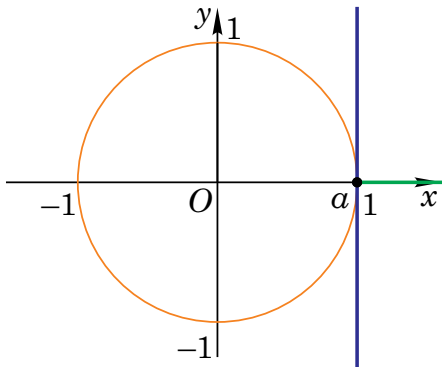
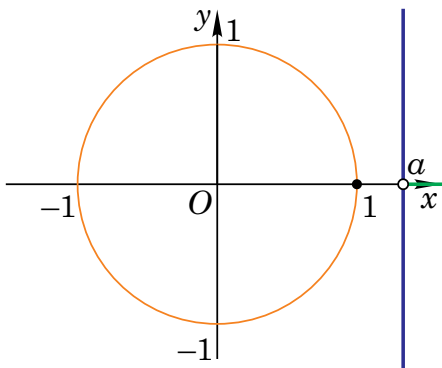
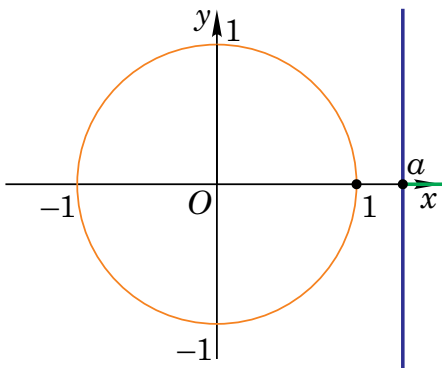
Відповідь. $\left(-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbb{Z}.$



IV. Розв'язування нерівностей $\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$

	Нерівність $\cos x < a$	Нерівність $\cos x \leq a$
$a < -1$	Не має розв'язків	Не має розв'язків
$a = -1$	Не має розв'язків	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

	Нерівність $\cos x < a$	Нерівність $\cos x \leq a$
$-1 < a < 1$	 $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$	 $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$a > 1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$
	Нерівність $\cos x > a$	Нерівність $\cos x \geq a$
$a < -1$	 $x \in \mathbb{R}$	 $x \in \mathbb{R}$

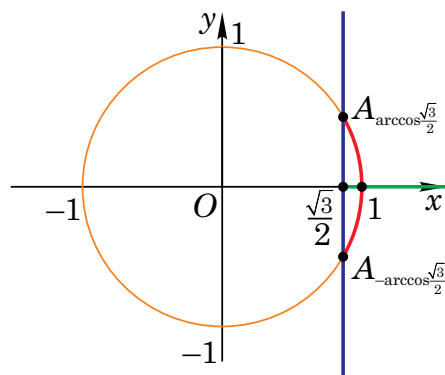
	Нерівність $\cos x > a$	Нерівність $\cos x \geq a$
$a = -1$	 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$	 $x \in \mathbb{R}$
$-1 < a < 1$	 $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	 $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$a = 1$	 Не має розв'язків	 $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$a > 1$	 Не має розв'язків	 Не має розв'язків

Ілюстративні приклади

9. Розв'яжіть нерівність $2\cos 3x \geq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$\begin{aligned}\cos 3x &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n &< 3x < \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n &< 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} &< x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

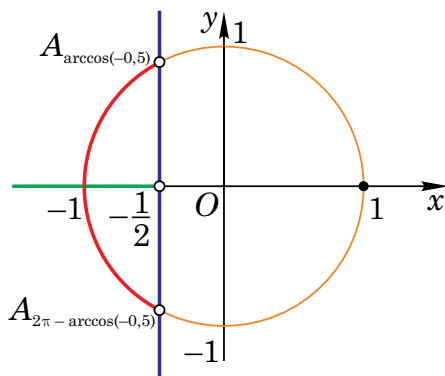


Відповідь. $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

10. Розв'яжіть нерівність $2\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) < -1$.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) &< -\frac{1}{2}, \\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n &< \frac{x}{2} - 3 < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n &< \frac{x}{2} - 3 < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5\pi}{6} + 3 + 2\pi n &< \frac{x}{2} < \frac{7\pi}{6} + 3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{5\pi}{3} + 6 + 4\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 6 + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



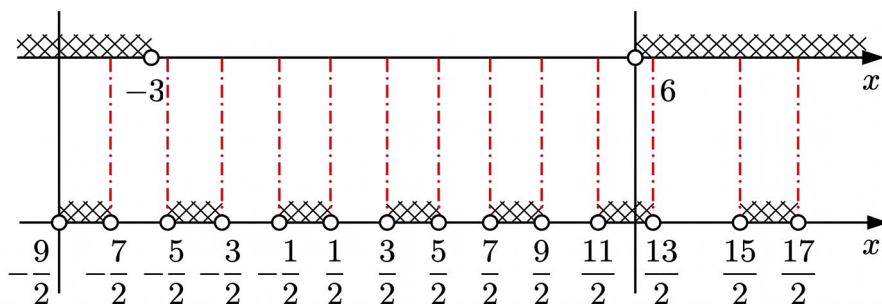
Відповідь. $\frac{5\pi}{3} + 6 + 4\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 6 + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

11. Розв'яжіть нерівність $\cos \pi x \cdot \sqrt{x^2 - 3x - 18} > 0$.

Розв'язання. Ліва частина нерівності є добутком тригонометричної функції та ірраціональної. Оскільки арифметичний квадратний корінь набуває завжди невід'ємного значення, то, враховуючи ОДЗ, остання нерівність буде рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 > 0, \\ \cos \pi x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 6)(x + 3) > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \pi x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 6)(x + 3) > 0, \\ \frac{-1 + 4n}{2} < x < \frac{1 + 4n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Множина розв'язків системи зображена на рисунку.



$$\text{Відповідь. } \begin{cases} x \in \left(\frac{4n-1}{2}; \frac{4n+1}{2} \right), n \in \mathbb{Z}, n \leq -2, \\ x \in \left(6; \frac{13}{2} \right) \cup \left(\frac{4n-1}{2}; \frac{4n+1}{2} \right), n \in \mathbb{Z}, n \geq 4. \end{cases}$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

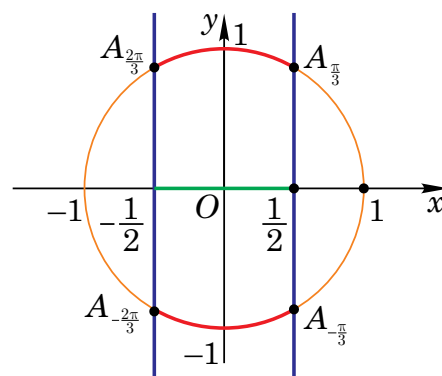
Задача. Під час випробовування автомобільного амортизатора на спеціальному стенді датчик фіксує вертикальне відхилення точки від положення рівноваги. Виявилося, що це відхилення описується рівнянням $x(t) = 10 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right)$, де t — час від початку випробування (в секундах), а $x(t)$ — відхилення точки від положення рівноваги (в сантиметрах). Уважається, що амортизатор працює в допустимому режимі, коли відхилення від положення рівноваги за абсолютною величиною не перевищує 5 см. Знайдіть, у які моменти часу впродовж першої хвилини від початку випробування амортизатор працював у допустимому режимі.

Розв'язання. За умовою задачі, запишемо нерів-

$$\text{ність: } \left| 10 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right) \right| \leq 5, \quad -5 \leq 10 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right) \leq 5,$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{1}{2}$ і не більші за $\frac{1}{2}$ (див. рисунок).



Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, запишемо:

$$\begin{cases} -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi t}{9} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi t}{9} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} -6 + 18n \leq t \leq -3 + 18n, \\ 3 + 18n \leq t \leq 6 + 18n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Умову задачі задовольняють часові періоди:

від 3 с до 6 с, від 12 с до 15 с, від 21 с до 24 с, від 30 с до 33 с, від 39 с до 42 с, від 48 с до 51 с, від 57 с до 60 с.

Відповідь. Від 3 с до 6 с, від 12 с до 15 с, від 21 с до 24 с, від 30 с до 33 с, від 39 с до 42 с, від 48 с до 51 с, від 57 с до 60 с.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть нерівність $2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$, тоді $\sqrt{6t^2 - 6t - 12} \geq 2t - 1$.

Нерівність рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{cases} 2t-1 < 0, \\ 6t^2-6t-12 \geq 0, \\ 2t-1 \geq 0, \\ 6t^2-6t-12 \geq (2t-1)^2; \end{cases} \right. \left[\begin{cases} t < \frac{1}{2}, \\ t^2-t-2 \geq 0, \\ t \geq \frac{1}{2}, \\ 6t^2-6t-12 \geq 4t^2-4t+1; \end{cases} \right. \left[\begin{cases} t < \frac{1}{2}, \\ (t+1)(t-2) \geq 0, \\ t \geq \frac{1}{2}, \\ 2t^2-2t-13 \geq 0; \end{cases} \right. \left[\begin{cases} t < \frac{1}{2}, \\ t \leq -1, \\ t \geq 2, \\ t \geq \frac{1}{2}, \\ t \leq \frac{1-\sqrt{27}}{2}, \\ t \geq \frac{1+\sqrt{27}}{2}; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} t \leq -1, \\ t \geq \frac{1+\sqrt{27}}{2}. \end{cases} \right.$$

Повернемось до заміни $\left[\begin{cases} \sin x \leq -1, \\ \sin x \geq \frac{1+\sqrt{27}}{2}. \end{cases} \right.$

Розв'язком першої нерівності сукупності є множина $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а друга нерівність розв'язків не має.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{x}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 5x > 1$; 4) $\cos(-3x) > \frac{1}{3}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$; 3) $\cos \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$; 4) $\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin 3x \geq 1$; 3) $\sin \frac{x}{2} \geq 1$; 4) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0,2$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos 2x \geq -1$; 2) $\cos x \leq -1$; 3) $\cos 2x \leq -1$; 4) $2\cos x > 1$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin(2-x) < 3$; 2) $3\cos(3-3x) \geq 3$;

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin \frac{x}{2} \geq -2$; 2) $\cos \frac{x}{4} \leq 2$; 3) $\cos 4x < 1,5$; 4) $\sin 5x > -\sqrt{2}$

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin(1-2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0,2$; 3) $\cos(2x-2) > \frac{1}{2}$; 4) $2\cos 4x + \sqrt{3} \leq 0$;

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $1 - 2\sin 2x > 0$; 2) $2\cos 2x + 1 < 0$; 3) $2\sin \frac{x}{2} \leq \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2} \cos 3x \geq 1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $4\cos^2 x \leq 3$; 4) $4\sin^2 x \geq 1$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\sin x - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - \cos x}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$; 2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$; 3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$; 4) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$; 2) $|\sin x| \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $|\cos x| \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} \geq \frac{1}{3}$; 2) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 < \sin x$;
3) $\sin x \cos x > 0$; 4) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x < 1$;

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{3}{4}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \sqrt{3}$;
3) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$; 4) $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

9. Розв'яжіть систему нерівностей на проміжку $[0; 2\pi]$:

1) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x < -\frac{1}{2}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x < \frac{1}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin(30^\circ + 3x) > \cos(60^\circ - 3x)$; 2) $\sin(30^\circ + 3x) < \cos(60^\circ - 3x)$.

11. Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sin 2x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi + x\right) > \frac{1}{3}\sin(\pi - x) + 0,1$.

12. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leq \frac{1}{2}$; 2) $\sin^4 x - \cos^4 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\sin x \cdot \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{4}$; 4) $(\sin \pi x - \cos \pi x)^2 \geq \frac{1}{2}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos\left(\sin x + \frac{\pi}{2}\right) < 0;$

2) $|\sin x| \cos x > \frac{1}{4}.$

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x \leq -2;$

2) $\cos 4x - \sin 4x \geq \sqrt{2};$

3) $\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x \geq 2\sqrt{3};$

4) $\cos 6x - \sin 6x \leq -\sqrt{2}.$

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \sin 2x - \frac{1}{2};$

2) $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{5}{8};$

3) $\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x \geq \cos 2x;$

4) $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}.$

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos \pi x \cdot \sqrt{255 - 4x - 4x^2} < 0;$

2) $\sin \pi x \cdot \sqrt{2 + x - x^2} > 0.$

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $|\sin x| < |\cos x|;$

2) $|\sin x| > |\cos x|;$

3) $|\cos x| + 3 \cos x < 1;$

4) $|\sin x + \cos x| < 1.$

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos(\sin x) > 0;$

2) $\sin(\cos x) < 0.$

7. Творче завдання. Візуалізуйте графічне розв'язування деяких нерівностей рівня В за допомогою Geogebra чи Desmos.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.....

.....

2)

.....

.....

?

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Аналіз руху маятника за допомогою тригонометричних нерівностей.
2. Тригонометричні нерівності в балістиці.
3. Застосування тригонометричних нерівностей у створенні дизайну атракціонів.
4. Біоритми людини та тригонометричні нерівності.
5. Застосування тригонометричних нерівностей у GPS-навігації.