

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 28. Урок —практикум. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

1) навчитися розв'язувати нерівності виду $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$;

2) розв'язувати подвійні тригонометричні нерівності;

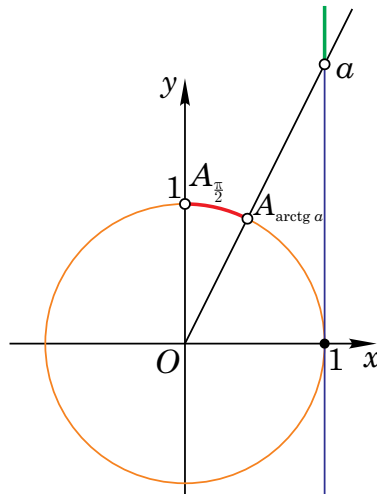
3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
2. Порівняйте $\arccos \frac{1}{3}$ і $\arccos \frac{2}{7}$.
3. Знайдіть область визначення функції $y = \arccos(10x - 3)$.
4. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$.
5. Розв'яжіть рівняння $4 \sin^2 x = \cos^2 x$.

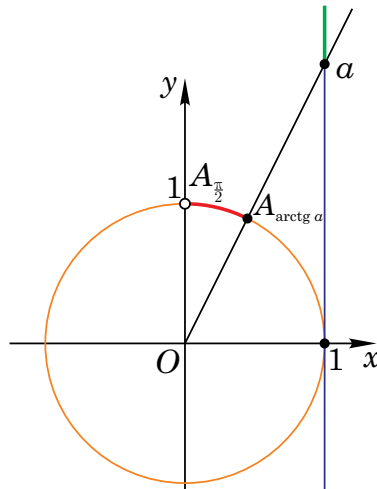
III. Розв'язування нерівностей $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$,
 $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$

Нерівність
 $\operatorname{tg} x > a$



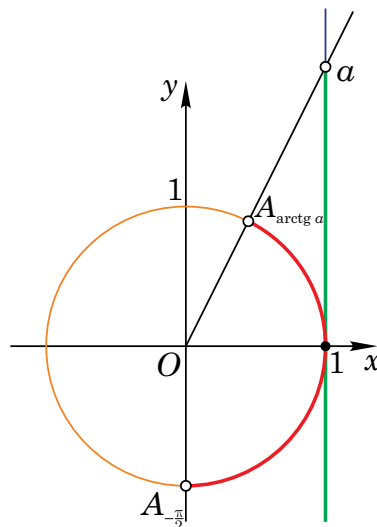
$$\arctg x + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Нерівність
 $\operatorname{tg} x \geq a$

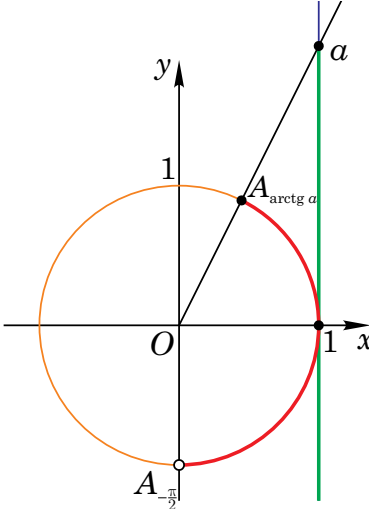
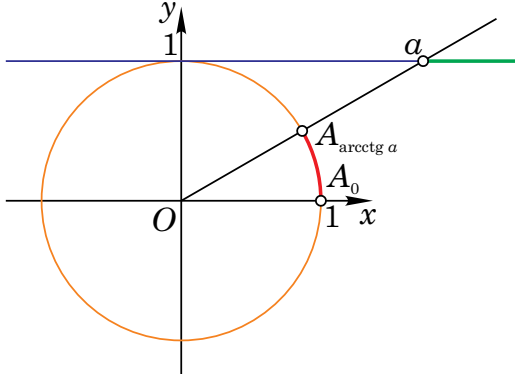
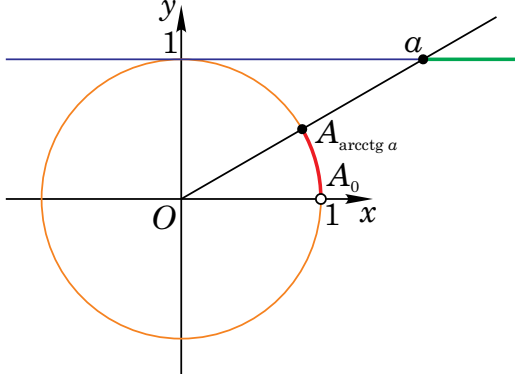
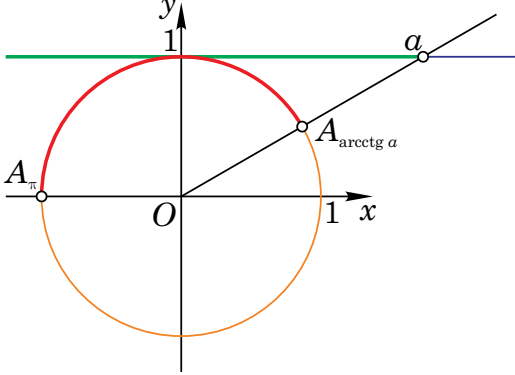


$$\arctg x + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

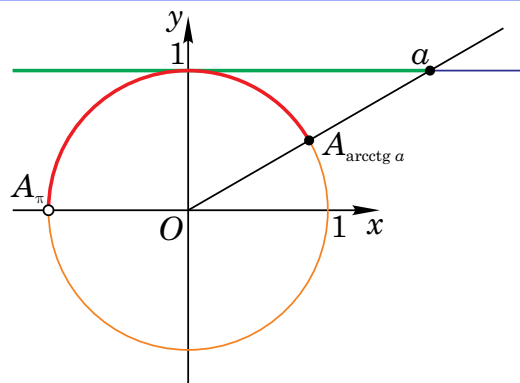
Нерівність
 $\operatorname{tg} x < a$



$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \arctg x + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Нерівність $\operatorname{tg} x \leq a$	 $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x > a$	 $\pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x \geq a$	 $\pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Нерівність $\operatorname{ctg} x < a$	 $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Нерівність
 $\operatorname{ctg} x \leq a$



$$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

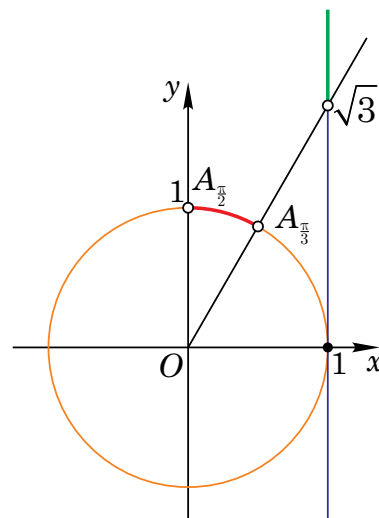
Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

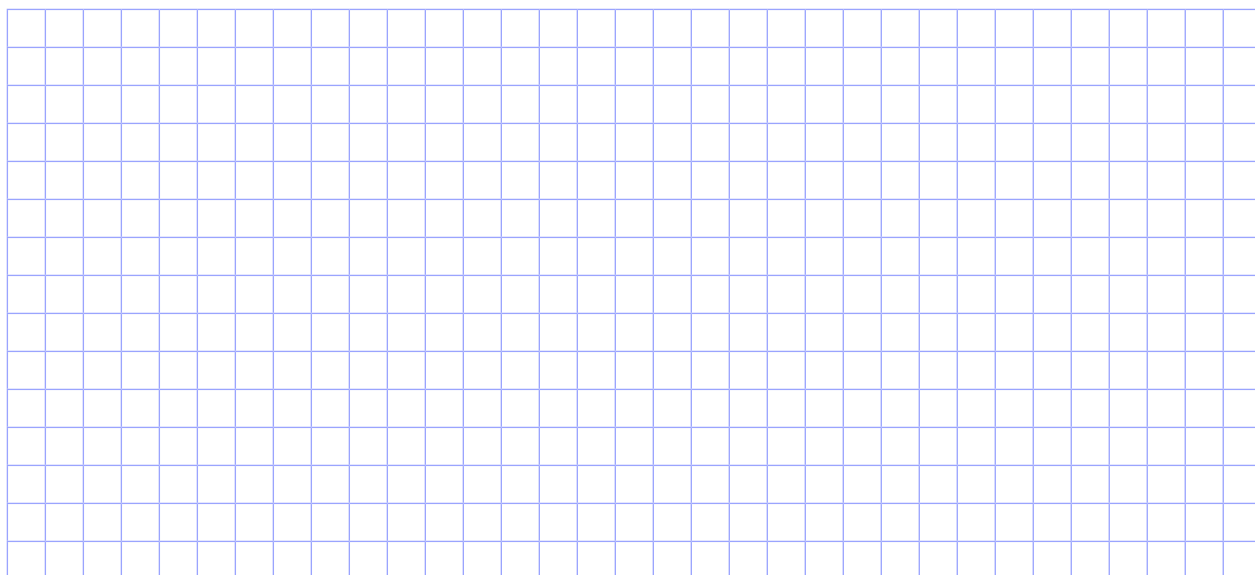
$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$



Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} 5x < -\frac{1}{2}$.



IV. Розв'язування подвійних тригонометричних нерівностей

Подвійні тригонометричні нерівності доцільно розв'язувати за допомогою одиничного кола.

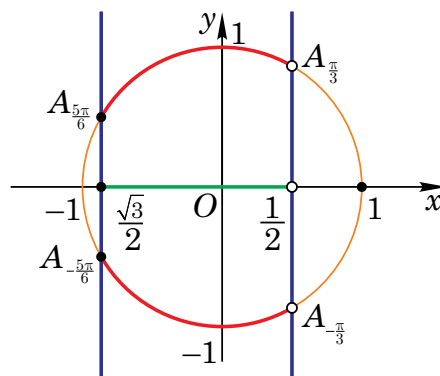
Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (див. рисунок).

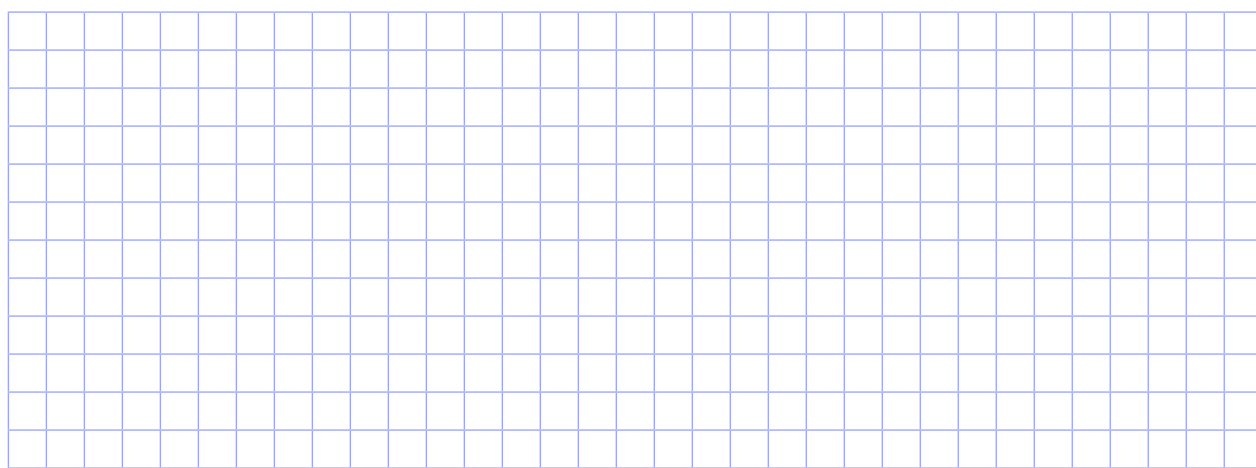
Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, запишемо:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$



Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Монтажники з обслуговування сонячних панелей ставлять приставну драбину довжиною 5 м до стіни. Щоб драбина була стійкою і майстер міг безпечно працювати відстань від основи драбини до стіни має бути не меншою від 1,5 м і не більшою за 2,5 м. Нехай α — кут між драбиною і горизонтальною поверхнею. Знайдіть інтервал значень кута α (у градусах), при яких майстер зможе безпечно виконувати свою роботу.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть нерівність $4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x < 1$; 3) $\operatorname{tg} 2x \leq 1$; 4) $\operatorname{tg} x \leq -1$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg} x \geq 1$; 2) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{2}{3}x \geq -101$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} x \leq 2$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} < 0$; 3) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 2x < -1$;

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{3} \leq \sin x < \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2} < \cos x \leq \frac{1}{4}$; 3) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$; 4) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1,5$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 2$; 3) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$; 4) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; 3) $|\cos 3x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x - 3}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$; 2) $0 < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$; 4) $|\sin x| \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $(1 + \cos 2x)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) > 0$; 2) $2 \cos x \operatorname{tg} x > \sin x - 1$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos x| < |\sin x|$; 2) $|\sin x| \geq \sqrt{3} |\cos x|$; 3) $\sqrt{3} |\cos x| \leq \sin x$; 4) $|\cos x| \geq -\sin x$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) > \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) < 3$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $1 < \operatorname{tg}(-2x) < \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3} < \operatorname{ctg} \left(-\frac{x}{2} \right) < 3$;
3) $1 < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) < \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2} < \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) < \sqrt{3}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{3} \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2} < \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) \leq \frac{1}{4}$;
3) $-1 \leq 2 \sin x < \sqrt{3}$; 4) $-4 < 4 \cos x < 1,5$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$; 2) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$; 3) $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$.

9. Розв'яжіть нерівність:

1) $0 < \operatorname{ctg} \frac{x}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{ctg} 3x < \sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} 2x \leq \sqrt{3}$; 4) $-1 < \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Розв'яжіть систему нерівностей на проміжку $[0; 2\pi]$:

1) $\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x \leq \frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < 1, \\ -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

11. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 0$; 2) $\sin x - \cos x \geq 0$; 3) $\cos 2x + \cos x \leq 0$; 4) $\sin 2x + \sin x < 0$.

12. Розв'яжіть нерівність:

1) $1 - \operatorname{tg} 2x \geq 0$; 2) $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq \sqrt{3}$;
3) $1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 0$; 4) $\operatorname{tg}(4x) + \sqrt{3} \leq 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \operatorname{tg}(4x - \pi) < 2 \operatorname{tg}(4x + 3\pi)$; 2) $\operatorname{ctg} \left(\pi x + \frac{\pi}{2} \right) > \operatorname{tg}(\pi x + \pi) - 2\sqrt{3}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} \cdot \sqrt{25x - x^2} > 0$; 2) $\operatorname{tg} 2\pi x \cdot \sqrt{9 + 3x - 2x^2} < 0$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{\cos^3 x + \sin^2 x}, \\ \frac{\pi}{4} < \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \leq 2\pi. \end{cases}$

4. Доведіть, що нерівність $\frac{1}{3} \leq \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \leq 3$ не виконується ні при якому α .

5. При яких значеннях параметра a має розв'язки нерівність:

1) $\cos^3 x \leq -8a^3$; 2) $\cos x + \sqrt{3} \sin x > a - 4$?

6. Знайдіть множину розв'язків системи:

1) $\begin{cases} 2 \cos 2x - 4 \cos x = 1, \\ \sin x \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x, \\ \cos x < -\frac{1}{2}; \end{cases}$
3) $\begin{cases} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 + \cos \frac{3}{2}x + \sqrt{3} \sin \frac{3}{2}x = 4 \sin^2 \frac{x}{2}, \\ \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0. \end{cases}$

- 7. Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей з тангенсом чи котангенсом.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

- 1.** Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей з параметрами.
- 2.** Подвійні тригонометричні нерівності в прикладних задачах.
- 3.** Дослідження коливальних періодичних процесів за допомогою найпростіших тригонометричних нерівностей.
- 4.** Використання подвійних нерівностей в задачах кінематики.
- 5.** Використання тригонометричних нерівностей для визначення коефіцієнта тертя тіла, що ковзає по похилій площині.







