

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 29. Урок —практикум. Розв'язування складніших тригонометричних нерівностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв'язувати тригонометричні нерівності, використовуючи метод заміни змінної;
- 2) розв'язувати тригонометричні нерівності методом інтервалів;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$.
2. Розв'яжіть нерівність $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.
3. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} 2x \geq -1$.
4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$.
5. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

III. Використання методу заміни

На попередніх уроках нам доводилося розв'язувати рівняння використовуючи метод заміни змінних. Подібні міркування можна застосовувати і при розв'язуванні тригонометричних нерівностей. Наприклад, якщо тригонометрична нерівність у результаті тотожних перетворень зводиться до виду: $a\sin^2 t + b\sin t + c > 0$, $a\sin^2 t + b\sin t + c < 0$ або $a\cos^2 t + b\cos t + c > 0$, $a\cos^2 t + b\cos t + c < 0$, то вводять заміну: $y = \sin t$, ($y = \cos t$), отримують нерівність виду: $ay^2 + by + c > 0$ або $ay^2 + by + c < 0$. Розв'язавши алгебричну

нерівність, повертаються до заміни. Розв'язують найпростішу тригонометричну нерівність, одержану в результаті підстановки.

Також методом заміни змінних можна розв'язувати й інші нерівності, використовуючи при цьому різноманітні підстановки. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 + t - 1 < 0$.

Розв'яжемо цю нерівність.

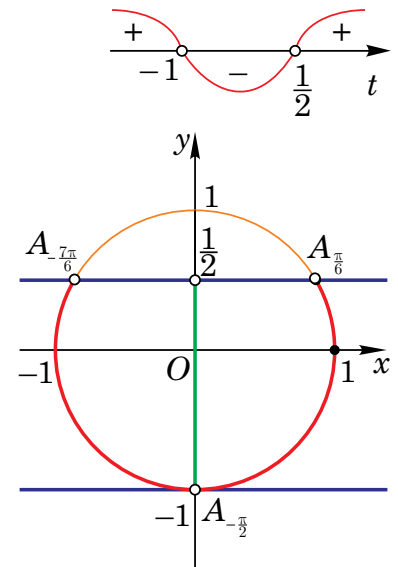
Нерівність зводиться до розв'язування системи:

$$\begin{cases} \sin x > -1, \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

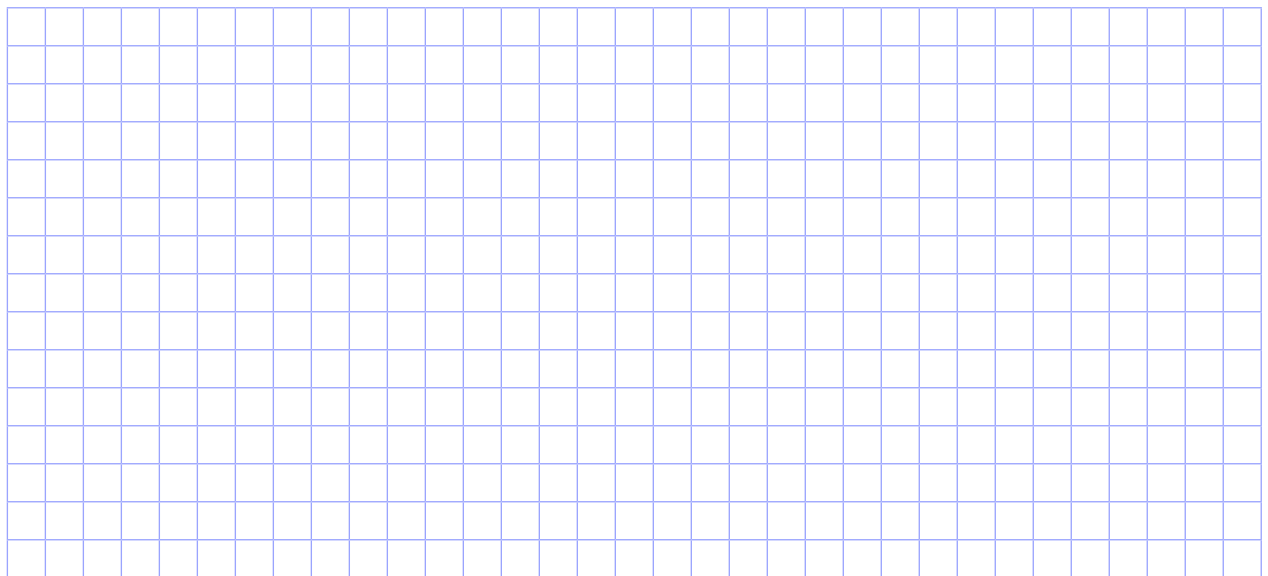
Позначимо розв'язки системи на одиничному колі (див. рисунок).

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \\ n \in \mathbb{Z}.$$



Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\cos 2x + 5\sin x - 3 < 0$.



IV. Метод інтервалів

Оскільки тригонометричні функції, їхня алгебрична сума, добуток та частка є неперервними функціями на області визначення, то метод інтервалів можна досить ефективно використовувати для розв'язування тригонометричних нерівностей. Оскільки тригонометричні рівняння мають безліч коренів, то для розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів, зручно користуватися певним алгоритмом.

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.
2. Визначаємо головний період T функції $f(x)$.
3. Знаходимо нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

4. Позначаємо знайдені нулі на проміжку довжиною T , як правило, на проміжку $[0; T]$ або $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.
5. Визначаємо знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків. Для цього підставляємо довільне значення x із кожного проміжку у функцію $f(x)$ і оцінюємо її знак. Цей процес інколи буває складним. Тому досить визначити знак функції на одному з проміжків (де це зробити найпростіше). За знаком функції на одному з проміжків, і враховуючи, що при переході через корінь непарної кратності знак функції змінюється, а при переході через корінь парної кратності функція не змінює свій знак, можна встановити знак функції на кожному з проміжків.
6. Вибираємо потрібні проміжки, на яких $f(x)$ набуває потрібного знаку і додаємо до кінців цих проміжків Tn , де T — головний період функції $f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Узгоджуємо знайдені розв'язки з областю визначення функції $f(x)$ і записуємо відповідь.

Методом інтервалів можна розв'язати будь-яку тригонометричну нерівність. Розв'язування нерівності в цьому випадку зводиться до розв'язування відповідного рівняння, що значно спрощує процес.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

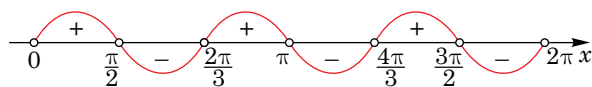
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x(2 \cos x + 1)$.

Функція перетворюється в нуль у точках, які задовольняють сукупність:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна і має період $T = 2\pi$, то достатньо знайти її знак на кожному інтервалі з проміжку $[0; 2\pi)$ та, враховуючи періодичність, записати відповідь.

Позначимо нулі функції на числовій осі й побудуємо криву знаків (див. рисунок).

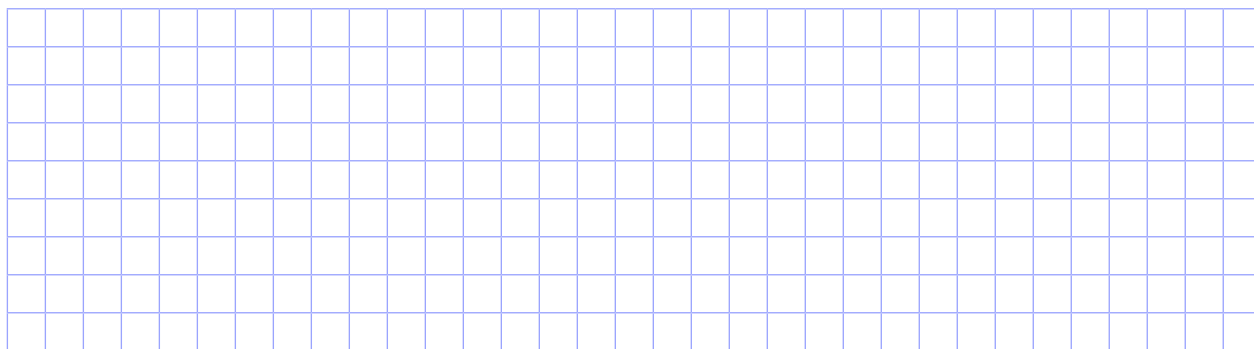


$$x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.





V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При гармонічному коливанні деякого механічного елемента його фазовий кут φ змінюється з часом і може набувати будь-яких дійсних значень. Експериментально встановлено, що механізм працює справно тоді, коли величина $f(\varphi) = \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1)$ є невід'ємною. Знайдіть усі дійсні значення фази φ за яких механізм працює справно.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[20]{\cos x} + \sqrt[20]{\sin x} > 1$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 < 0$;

2) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 \geq 0$;

3) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

4) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} x \geq 2 \operatorname{ctg} x$;

2) $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + 3 > 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^2 x - \sin 2x - 3 \cos^2 x < 0$;

2) $\sin^2 x + \sin 2x > 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \cos x \geq 1$;

2) $\sqrt{3} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \leq \sin x$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \sin 2x > 0$;

2) $\cos x - \cos 3x \leq 0$;

3) $\sin 5x - \sin x \leq 0$;

4) $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 3x$;

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 \geq 0$;

3) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 < 0$;

2) $2\cos^2 x - \sin x > 1$;

4) $3\cos 2x + 2\cos x \geq 5$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$;

2) $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} > 1$;

2) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$;

2) $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 x + \sin x \cos x \geq 1$;

2) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x < 1$;

3) $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin 2x > \cos 2x$;

4) $1 + \sin 2x < \cos^2 x - \sin^2 x$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 x + 3 > 7\sin 2x$;

2) $\sin x \leq \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} > 0$;

2) $2\sin 2x \sin x > \cos x$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos 4x + \sin^2 3x < 1$;

2) $\cos^2 7x + \sin^2 6x < 0$.

9. Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sin x + \sin 2x < 0$;

2) $\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin 2x} \leq 0$;

3) $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$;

4) $\frac{5 - 4(\sin^2 x + \cos x)}{\cos x} \leq 0$.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x \geq \sin 2x + 3\sin x$;

2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x < 0$.

11. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;

2) $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$;

3) $\cos x \cos 2x \cos 3x \leq 0$;

4) $\sin x \operatorname{tg} x < \cos x + \operatorname{tg} x$.

12. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $4\cos 2x - 5\sin^2 x - \sin^2 2x < 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \sin 2x < 5(1 + \cos x - \sin x)$; 2) $4 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg} x - \frac{2}{\cos^2 x} > 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$; 2) $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$;
3) $\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^3 x + 16 > 8 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x$; 4) $(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg} x - 3)(\operatorname{tg} x - 4)(\operatorname{tg} x - 5) < 24$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x < 0$;
2) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) > \sin^2 x \cos 9x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right)$;
3) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{9}{8}$;
4) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x \leq 2$.

5. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x > \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) < \sin^2 x$; 2) $\cos 3x \sin x + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) > 1$.

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:
.....
(-) що залишилося незрозумілим:
.....
.....
(?) що здивувало або зацікавило:
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Типові помилки при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.
2. Поєднання методу заміни змінних та методу інтервалів при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.
3. Автоматизація перевірки розв'язків тригонометричних нерівностей.
4. Побудова універсального алгоритму розв'язування тригонометричних нерівностей.
5. Тригонометричні нерівності з параметрами.







