

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 29. Урок —практикум. Розв'язування складніших тригонометричних нерівностей

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Використання методу заміни.
2. Метод інтервалів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи допомагає уміння розв'язувати раціональні нерівності при розв'язуванні тригонометричних нерівностей?

2) Чи можна вважати метод інтервалів універсальним методом розв'язування нерівностей?

3) Чому корисно уміти знаходити період функції при розв'язуванні складних тригонометричних нерівностей?

4) У яких випадках доцільно поєднувати метод заміни та метод інтервалів при розв'язуванні тригонометричних нерівностей?

5) У чому полягає логіка розбиття числової осі на інтервали при розв'язуванні нерівностей методом інтервалів?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$.

Відповідь. $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть нерівність $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

3. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} 2x \geq -1$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$.

Відповідь. $(-\infty; 1] \cup [1; 2) \cup (3; +\infty)$.

5. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При гармонічному коливанні деякого механічного елемента його фазовий кут φ змінюється з часом і може набувати будь-яких дійсних значень. Експериментально встановлено, що механізм працює справно тоді, коли величина $f(\varphi) = \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1)$ є невід'ємною. Знайдіть усі дійсні значення фази φ за яких механізм працює справно.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[20]{\cos x} + \sqrt[20]{\sin x} > 1$.

III. Використання методу заміни

На попередніх уроках нам доводилося розв'язувати рівняння використовуючи метод заміни змінних. Подібні міркування можна застосовувати і при розв'язуванні тригонометричних нерівностей. Наприклад, якщо тригонометрична нерівність у результаті тотожних перетворень зводиться до виду: $a \sin^2 t + b \sin t + c > 0$, $a \sin^2 t + b \sin t + c < 0$ або $a \cos^2 t + b \cos t + c > 0$, $a \cos^2 t + b \cos t + c < 0$, то вводять заміну: $y = \sin t$, ($y = \cos t$), отримують нерівність виду: $ay^2 + by + c > 0$ або $ay^2 + by + c < 0$. Розв'язавши алгебричну нерівність, повертаються до заміни. Розв'язують найпростішу тригонометричну нерівність, одержану в результаті підстановки.

Також методом заміни змінних можна розв'язувати й інші нерівності, використовуючи при цьому різноманітні підстановки. Розглянемо декілька прикладів.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть нерівність $2 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 + t - 1 < 0$.

Розв'яжемо цю нерівність.

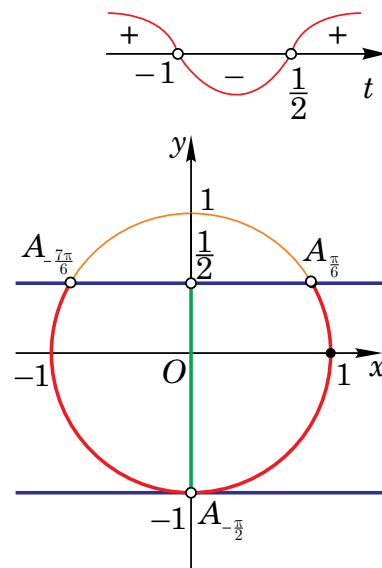
Нерівність зводиться до розв'язування системи:

$$\begin{cases} \sin x > -1, \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Позначимо розв'язки системи на одиничному колі (див. рисунок).

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),$
 $n \in \mathbb{Z}.$



7. Розв'яжіть нерівність $\cos 2x + 5\sin x - 3 < 0$.

Розв'язання. $1 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 < 0$,
 $-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 < 0$, $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$.

Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 - 5t + 2 > 0$.

Розв'яжемо цю нерівність.

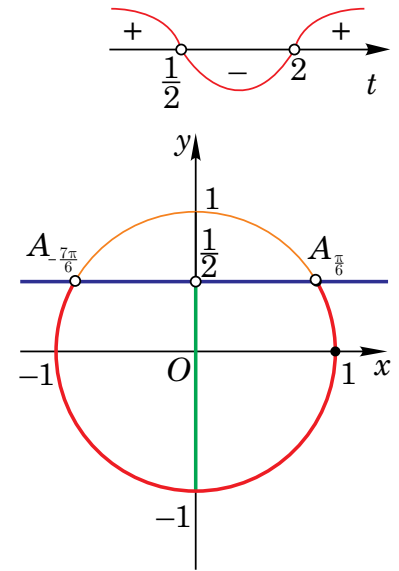
Нерівність зводиться до розв'язування сукупності

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 2, \end{cases} \text{ яка рівносильна нерівності } \sin x < \frac{1}{2}.$$

Позначимо розв'язки нерівності на одиничному колі (див. рисунок).

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



8. Розв'яжіть нерівність $2\operatorname{tg} 2x \leq 3\operatorname{tg} x$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{4\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \leq 3\operatorname{tg} x, \quad \frac{\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \leq 0.$$

$$\text{Нехай } \operatorname{tg} x = t, \text{ тоді } \frac{t(1 + 3t^2)}{(1 - t)(1 + t)} \leq 0.$$

Скористаємось методом інтервалів.

Нерівність зводиться до розв'язування сукупності

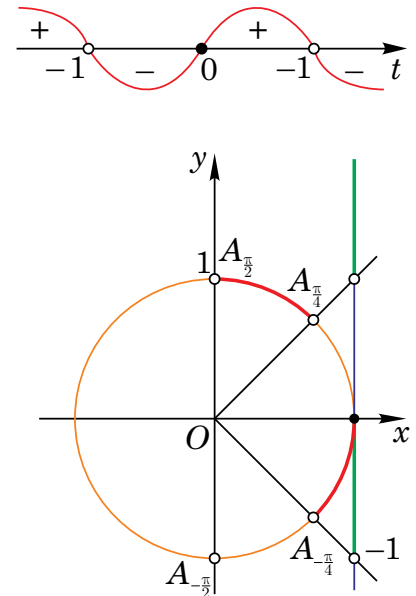
$$\begin{cases} -1 < t \leq 0, \\ t > 1. \end{cases}$$

$$\text{Повернемось до заміни } \begin{cases} -1 < \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x > 1. \end{cases}$$

Позначимо розв'язки сукупності нерівностей на одиничному колі (див. рисунок).

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \pi n < x \leq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n \right] \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



9. Розв'яжіть нерівність $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2$.

Розв'язання. Зведемо дану нерівність до однорідної, врахувавши, що $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$4\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x > 0,$$

Перевіримо, чи будуть розв'язками нерівності точки, для яких $\cos^2 x = 0$. За такої умови $\sin^2 x = 1$ і тому $4 - 0 - 0 > 0$. Нерівність правильна.

Отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ — розв'язки нерівності.

Для випадку $\cos^2 x \neq 0$ поділимо обидві частини нерівності на $\cos^2 x$:

$$4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 > 0.$$

Нехай $\operatorname{tg} x = t$, тоді $4t^2 - t - 3 > 0$.

$$\begin{cases} t < -\frac{3}{4}, \\ t > 1. \end{cases}$$

Повернемось до заміни: $\begin{cases} \operatorname{tg} x < -\frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x > 1. \end{cases}$

Позначимо розв'язки сукупності нерівностей на одиничному колі (див. рисунок).

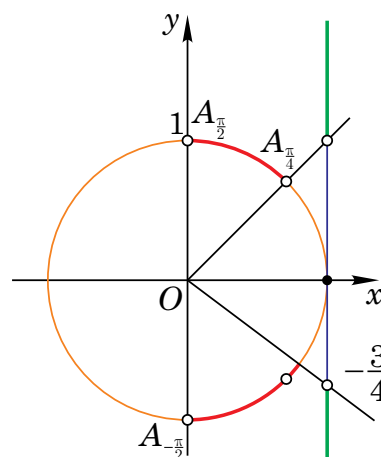
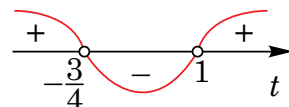
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\arctg \frac{3}{4} + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$ і розв'язки

виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, отримуємо

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi - \arctg \frac{3}{4} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi - \arctg \frac{3}{4} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



IV. Метод інтервалів

Оскільки тригонометричні функції, їхня алгебрична сума, добуток та частка є неперервними функціями на області визначення, то метод інтервалів можна досить ефективно використовувати для розв'язування тригонометричних нерівностей. Оскільки тригонометричні рівняння мають безліч коренів, то для розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів, зручно користуватися певним алгоритмом.

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.
2. Визначаємо головний період T функції $f(x)$.
3. Знаходимо нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.
4. Позначаємо знайдені нулі на проміжку довжиною T , як правило, на проміжку $[0; T]$ або $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.
5. Визначаємо знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків. Для цього підставляємо довільне значення x із кожного проміжку у функцію $f(x)$ і оцінюємо її знак. Цей процес інколи буває складним. Тому досить визначити знак функції на одному з проміжків (де це зробити найпростіше). За знаком функції на одному з проміжків, і враховуючи, що при переході через корінь непарної кратності знак функції змінюється, а при переході через корінь парної кратності функція не змінює свій знак, можна встановити знак функції на кожному з проміжків.

6. Вибираємо потрібні проміжки, на яких $f(x)$ набуває потрібного знаку і додаємо до кінців цих проміжків Tn , де T — головний період функції $f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Узгоджуємо знайдені розв'язки з областю визначення функції $f(x)$ і записуємо відповідь.

Методом інтервалів можна розв'язати будь-яку тригонометричну нерівність. Розв'язування нерівності в цьому випадку зводиться до розв'язування відповідного рівняння, що значно спрощує процес.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

Ілюстративні приклади

10. Розв'яжіть нерівність $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

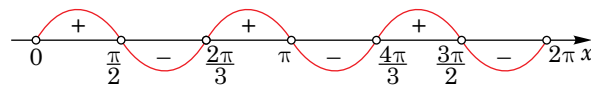
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x(2 \cos x + 1)$.

Функція перетворюється в нуль у точках, які задовольняють сукупність:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна і має період $T = 2\pi$, то достатньо знайти її знак на кожному інтервалі з проміжку $[0; 2\pi)$ та, враховуючи періодичність, записати відповідь.

Позначимо нулі функції на числовій осі й побудуємо криву знаків (див. рисунок).



$$x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

11. Розв'яжіть нерівність $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.

Розв'язання. $1 - \cos x - \operatorname{tg} x + \sin x < 0$,

Для функції $f(x) = 1 - \cos x - \operatorname{tg} x + \sin x$ головний період $T = 2\pi$.

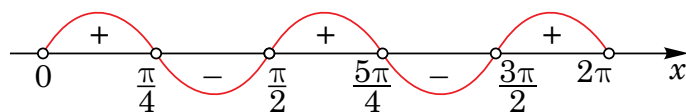
$$\frac{\cos x - \cos^2 x - \sin x + \sin x \cos x}{\cos x} < 0, \quad \frac{(\cos x - \sin x)(1 - \cos x)}{\cos x} < 0.$$

Знайдемо нулі функції $f(x)$:

$$\frac{(\cos x - \sin x)(1 - \cos x)}{\cos x} = 0, \quad \begin{cases} \cos x - \sin x = 0, \\ 1 - \cos x = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x = 1, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Враховуючи, що функція $f(x)$ має найменший додатний період $T = 2\pi$, маємо:



$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При гармонічному коливанні деякого механічного елемента його фазовий кут φ змінюється з часом і може набувати будь-яких дійсних значень. Експериментально встановлено, що механізм працює справно тоді, коли величина $f(\varphi) = \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1)$ є невід'ємною. Знайдіть усі дійсні значення фази φ за яких механізм працює справно.

Розв'язання. Математичною моделлю даної задачі є нерівність $\sin \varphi (2 \sin \varphi - 1) \geq 0$.

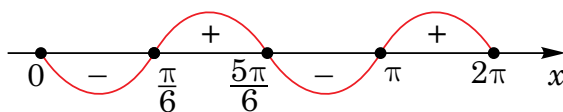
Функція $f(\varphi) = \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1)$ має головний період 2π , щоб це довести достатньо подати функцію у вигляді $f(\varphi) = 2 \sin^2 \varphi - \sin \varphi = 1 - \cos 2\varphi - \sin \varphi$.

Знайдемо нулі функції $f(\varphi) = \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1)$ на проміжку $[0; 2\pi)$.

$$\begin{cases} \sin \varphi = 0, \\ \sin \varphi = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_4 = \pi.$$

Використаємо методом інтервалів (див. рисунок).



$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right] \cup [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right] \cup [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[20]{\cos x} + \sqrt[20]{\sin x} > 1$.

Розв'язання. З умови випливає, що значення $\sin x$ та $\cos x$ лежать на відрізку $[0; 1]$, а це означає, що $\sqrt[20]{\sin x} \geq \sin^2 x$ і $\sqrt[20]{\cos x} \geq \cos^2 x$.

Маємо $\sqrt[20]{\sin x} + \sqrt[20]{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Причому знак рівності можливий лише за умови $\begin{cases} \sqrt[20]{\sin x} = \sin^2 x, \\ \sqrt[20]{\cos x} = \cos^2 x. \end{cases}$

Інакше кажучи дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ 0 < \cos x < 1. \end{cases}$

Звідки $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$;

2) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 \geq 0$;

3) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

4) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} x \geq 2\operatorname{ctg} x$;

2) $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$;

2) $\operatorname{tg}^3 x + 3 > 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x < 0$;

2) $\sin^2 x + \sin 2x > 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \cos x \geq 1$;

2) $\sqrt{3}\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \leq \sin x$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \sin 2x > 0$;

2) $\cos x - \cos 3x \leq 0$;

3) $\sin 5x - \sin x \leq 0$;

4) $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 3x$;

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 \geq 0$;

2) $2\cos^2 x - \sin x > 1$;

3) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 < 0$;

4) $3\cos 2x + 2\cos x \geq 5$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$;

2) $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} > 1$;

2) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$;

2) $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 x + \sin x \cos x \geq 1$;

2) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x < 1$;

3) $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin 2x > \cos 2x$;

4) $1 + \sin 2x < \cos^2 x - \sin^2 x$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \sin^2 x + 3 > 7 \sin 2x$;

2) $\sin x \leq \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} > 0$;

2) $2 \sin 2x \sin x > \cos x$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos 4x + \sin^2 3x < 1$;

2) $\cos^2 7x + \sin^2 6x < 0$.

9. Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \sin x + \sin 2x < 0$;

2) $\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\sin 2x} \leq 0$;

3) $\frac{\sin x - 2}{4 \sin^2 x - 1} > 2$;

4) $\frac{5 - 4(\sin^2 x + \cos x)}{\cos x} \leq 0$.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x \geq \sin 2x + 3 \sin x$;

2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x < 0$.

11. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;

2) $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$;

3) $\cos x \cos 2x \cos 3x \leq 0$;

4) $\sin x \operatorname{tg} x < \cos x + \operatorname{tg} x$.

12. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $4 \cos 2x - 5 \sin^2 x - \sin^2 2x < 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \sin 2x < 5(1 + \cos x - \sin x)$;

2) $4 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg} x - \frac{2}{\cos^2 x} > 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$;

3) $\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^3 x + 16 > 8 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x$;

4) $(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg} x - 3)(\operatorname{tg} x - 4)(\operatorname{tg} x - 5) < 24$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x < 0$;

2) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) > \sin^2 x \cos 9x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right)$;

$$3) \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{9}{8};$$

$$4) \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x \leq 2.$$

5. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x > \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

6. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) < \sin^2 x; \quad 2) \cos 3x \sin x + 2\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) > 1.$$

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Типові помилки при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.
- 2.** Поєднання методу заміни змінних та методу інтервалів при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.
- 3.** Автоматизація перевірки розв'язків тригонометричних нерівностей.
- 4.** Побудова універсального алгоритму розв'язування тригонометричних нерівностей.
- 5.** Тригонометричні нерівності з параметрами.