

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 3. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $A \cos(kx + b) = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати рівняння виду $A \cos(kx + b) = a$;
- 2) робити вибірку коренів рівняння на заданому проміжку;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Усно. Повторення

1. Скільки коренів має рівняння $\cos 5E = -\frac{\pi}{3}$?
2. Розв’яжіть рівняння $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1$.
3. Розв’яжіть рівняння $\cos \frac{x}{3} = 0$.
4. Розв’яжіть рівняння $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Обчисліть: $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$.

III. Розв’язування рівнянь виду $A \cos(kx + b) = a$

Наведемо алгоритм розв’язування рівняння виду $A \cos(kx + b) = a$.

1) Якщо $A = 0$ і $a = 0$, то будь-яке число є коренем даного рівняння;

якщо $A = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $A \neq 0$, то поділимо обидві частини даного рівняння на A , отримаємо рівняння

$$\cos(kx + b) = \frac{a}{A}.$$

2) Якщо $k < 0$, то потрібно скористатися парністю функції $y = \cos x$ і змінити знаки біля k і b на протилежні.

3) Якщо $\left| \frac{a}{A} \right| > 1$, то рівняння коренів не має;

4) Якщо $\left| \frac{a}{A} \right| \leq 1$, то знаходимо значення виразу $kx + b$:

- якщо $\frac{a}{A}$ дорівнює 0, 1 чи -1 , то застосовуємо формули для особливих випадків;
- використовуємо загальну формулу, тобто $kx + b = \pm \arccos\left(\frac{a}{A}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5) Розв'язуємо останнє рівняння як лінійне відносно x , попередньо обчисливши арккосинус, якщо він табличний.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2\cos(2x - 1) = -\sqrt{2}$.

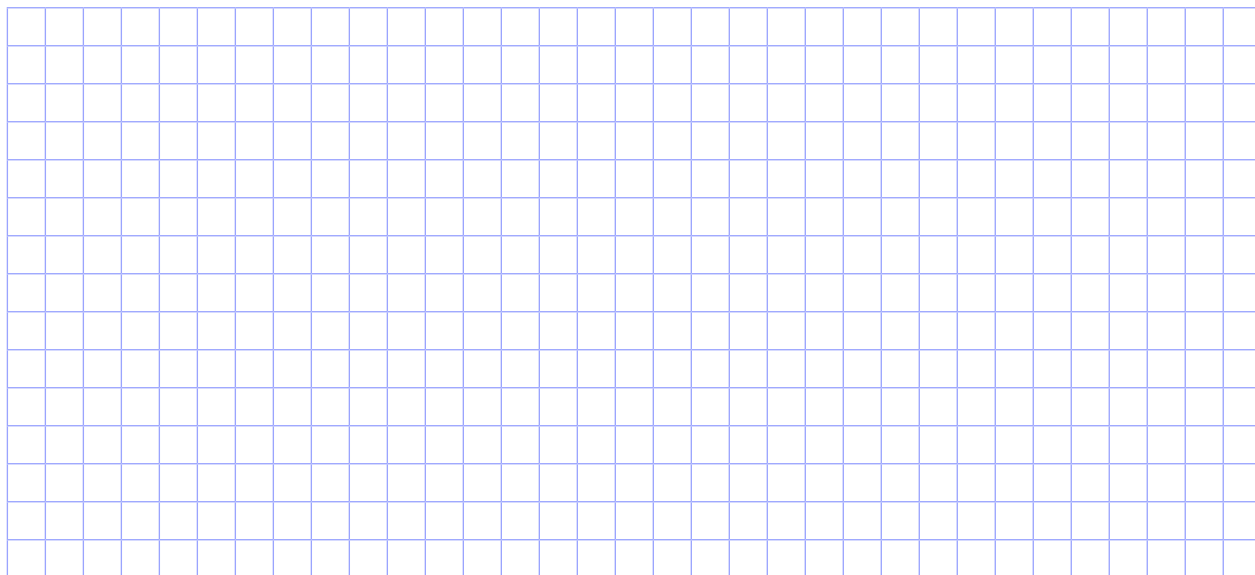
Розв'язання. $2\cos(2x - 1) = -\sqrt{2}$, $\cos(2x - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$2x - 1 = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 2x - 1 = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = \pm \frac{3\pi}{4} + 1 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\pm \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \sqrt{3} = 0$.



IV. Вибірка коренів рівняння на заданому проміжку

При вибірці коренів тригонометричного рівняння, що належать певному проміжку існує три основні принципи розв'язання.

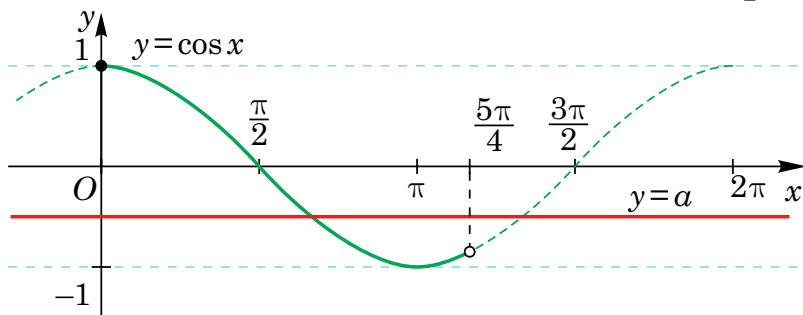
1) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на одиничному колі. Також позначити на одиничному колі заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

2) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на графіку. Також позначити на цьому графіку заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

3) Розв'язати рівняння і скласти систему нерівностей відносно цілого параметра так, щоб отримані корені належали заданому проміжку. Знайти усі значення цілого параметра, що задовольняють системі нерівностей. Підставити ці значення у загальну формулу коренів рівняння.

Приклад 3. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ (див. рисунок).



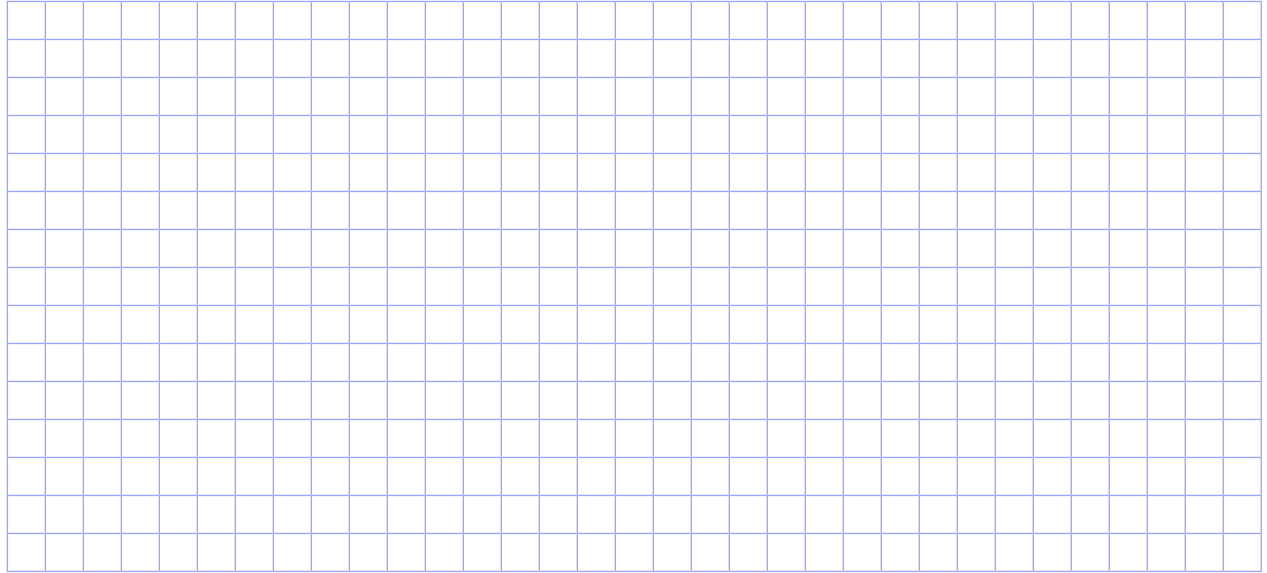
Кількість коренів даного рівняння визначається кількістю точок перетину прямої $y = a$ із графіком функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Звернемо увагу, що точка $(0; 1)$ належить виділеній кривій, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не належить. За допомогою рисунка можна зробити висновки:

- якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння коренів не має;
- якщо $a = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$, то рівняння має 1 корінь;
- якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то рівняння має 2 корені.

Відповідь. Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння немає коренів; якщо $a = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$, то рівняння має один корінь; якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то рівняння має два корені.

Приклад 3. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Глибина h (у метрах) біля причалу морського порту внаслідок припливів змінюється з часом t (у годинах) упродовж доби, за законом $h(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Визначте момент часу впродовж доби, коли глибина дорівнює 14 м.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos 3x = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(-\frac{x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 4) \cos\frac{x}{5} = 1.$$

2. Розв'яжіть рівняння на вказаному проміжку:

$$1) \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0^\circ < x < 180^\circ; \quad 2) \cos 5x = -\frac{1}{2}, \quad 90^\circ < x < 180^\circ.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad 2) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad 3) 3 \cos(x + \pi) = -\frac{3}{2}; \quad 4) \frac{1}{2} \cos 4x = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $5\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$; 3) $4\cos(2x + \pi) = -2$; 4) $2\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(2x - 3) = \frac{1}{3}$; 2) $\cos(1 - 3x) = \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos(5x + 1) = \frac{\pi}{3}$; 4) $\cos(4x - 5) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$.

6. Чи має зміст вираз:

1) $\arccos\sqrt{3}$; 2) $\arccos(-\pi)$; 3) $\arccos\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)$?

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ і вкажіть:

- 1) найменший додатний корінь;
- 2) корені, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- 3) найбільший від'ємний корінь;
- 4) корені, які належать проміжку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\cos 5x}$; 2) $y = \frac{3}{\cos x - 1}$; 3) $y = \frac{2,7}{\cos x + 3}$; 4) $y = \frac{7x}{\cos x - 0,7}$.

3. Розв'яжіть рівняння на вказаному проміжку:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) = 1, 0 < x < 9$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) = 1, 3 < x < 9$.

4. Розв'яжіть рівняння на вказаному проміжку:

1) $\sqrt{3} + 2\cos\frac{\pi x}{9} = 0, 8 < x < 20$; 2) $1 + 2\cos\frac{\pi x}{3} = 0, 2 < x < 4$;
3) $1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0, 5 < x < 20$; 4) $1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{8} = 0, 3 < x < 10$.

5. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -a^2 - 1$ має розв'язки?

6. Знайдіть усі корені рівняння $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos\left(\frac{9}{4}x - \frac{5\pi}{12}\right) = 3$; 2) $7\cos\left(-\frac{5}{6}x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{7}{2}$;
3) $3\cos\left(\frac{11}{3}x - \frac{2\pi}{5}\right) = 1$; 4) $2\cos\left(-\frac{4}{3}x + \frac{3\pi}{10}\right) = -1$.

8. Розв'яжіть рівняння $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.

9. При яких значеннях параметра a має корені рівняння $(a^2 - 4)\cos x = a + 2$?

10. Розв'яжіть рівняння $\cos x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Розв'яжіть рівняння $2 \cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$.

12. Знайдіть найбільший від’ємний корінь рівняння $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0;$$

$$2) \frac{\cos 4x - 1}{\cos(-x)} = 0.$$

2. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots = 1$.

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{\pi(x^2+1)}{x^2+11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

6. При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язування рівняння виду $A\cos(kx + b) = a$.

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.

.

2)

 ?

Можливі теми проєктів

1. Рівняння $A\cos(kx + b) = a$, які описують коливання маятників та пружин.
2. Рівняння $A\cos(kx + b) = a$ у періодичних процесах природи та техніки.
3. Рівняння $A\cos(kx + b) = a$ при розрахунку кута нахилу сонячних панелей.
4. Моделювання хвиль у комп'ютерній графіці та їхній зв'язок з тригонометричними рівняннями.
5. Графічна інтерпретація розв'язання рівнянь виду $A\cos(kx + b) = a$ засобами графічних калькуляторів.







