

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 30. Урок–практикум. Тригонометрична підстановка

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) застосовувати тригонометричну підстановку;
- 2) розв'язувати рівняння та системи рівнянь з використанням тригонометричної підстановки;
- 3) доводити нерівності, використовуючи тригонометричну підстановку.
- 4) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Обчисліть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
3. Обчисліть $\cos 3\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.
4. Обчисліть значення виразу $4\sin^2 \alpha$, якщо $4\cos^2 \alpha = 1$.
5. Спростіть вираз $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\sin^2 \alpha$.

III. Принцип застосування тригонометричної підстановки

При розв'язуванні деяких алгебричних задач (здебільшого олімпіадних або конкурсних) зручно замінити змінну (або змінні, якщо їх кілька) тригонометричною функцією і звести таким чином алгебричну задачу до тригонометричної. Такі заміни — тригонометричні підстановки, істотно спрощують розв'язання. Вибір тієї чи іншої функції при цьому залежить від вигляду рівняння, системи рівнянь або алгебричного виразу, який

потрібно спростити. Наприклад, якщо з умови випливає, що допустимі значення змінної x визначаються нерівністю $|x| \leq 1$, то зручною є підстановка $x = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ або $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$. Яку з них вибрати, залежить від конкретної задачі.

У випадках, коли змінна може набувати будь-яких значень, то використовують заміни $x = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ або $x = \operatorname{ctg} \alpha$, де $\alpha \in (0; \pi)$.

Деякі типові ситуації для застосування тригонометричних підстановок

1. У виразах виду $\sqrt{a^2 - x^2}$ доцільно використати підстановки $x = a \cos \alpha$ або $x = a \sin \alpha$.
2. У виразах виду $\sqrt{x^2 - a^2}$ доцільно використати підстановки $x = \frac{a}{\cos \alpha}$ або $x = \frac{a}{\sin \alpha}$.
3. Вирази $\sqrt{x^2 + a^2}$ указують на підстановки $x = a \operatorname{tg} \alpha$ або $x = a \operatorname{ctg} \alpha$.
4. У виразах $\sqrt{2x^2 - 1}$ та $\sqrt{1 - 2x^2}$ можна використати підстановки $x = \cos \alpha$ та $x = \sin \alpha$ відповідно, а далі скористатися формулою косинуса подвійного аргументу.
5. Вираз $\frac{2x}{1 - x^2}$ подібний до формули тангенса подвійного аргументу, тому доцільно спробувати підстановку $x = \operatorname{tg} \alpha$.
6. Вирази $\frac{x + y}{1 - xy}$ та $\frac{x - y}{1 + xy}$ нагадують формули тангенса суми та тангенса різниці відповідно, тому варто використати подвійну підстановку $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$.

Приклад 1. Яку тригонометричну підстановку доцільно використати для рівняння $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$ і чому?

Розв'язання. Оскільки з умови випливає, що $x \in [-1; 1]$, то доцільно використати заміну $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ або $x = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Проте, оскільки

$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$, то доцільно скористатися саме підстановкою $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$.

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \quad |\sin \alpha| = \cos 3\alpha.$$

Оскільки $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha = \cos 3\alpha$.

Відповідь. $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$.

Приклад 2. Оберіть тригонометричну підстановку для рівняння $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 1 > 0$, то $|x| > 1$. Зауважимо, що від'ємне значення змінної не може бути розв'язком задачі. Справді, перетворимо початкове рівняння до вигляду $x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{35}{12}$.

Отже, $x > 1$, тоді $\frac{1}{x} \in (0; 1)$, тому можна скористатися підстановкою

Початкове рівняння перепишеться у вигляді $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{35}{12}$.

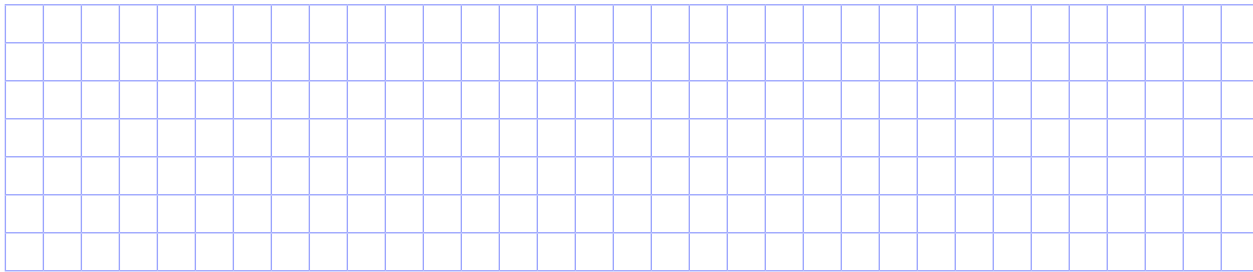
Приклад 3. Оберіть тригонометричну підстановку для розв'язування системи рівнянь

Розв'язання. Оскільки сума квадратів чисел x і y дорівнює одиниці, то кожне з цих чисел за модулем не перевищує одиниці і їх можна розглядати як синус та косинус деякого кута. Тому можна зробити підстановку $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$. Друге рівняння системи набуде вигляду $4 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) = 1$, звідки $\sin 4\alpha = 1$.

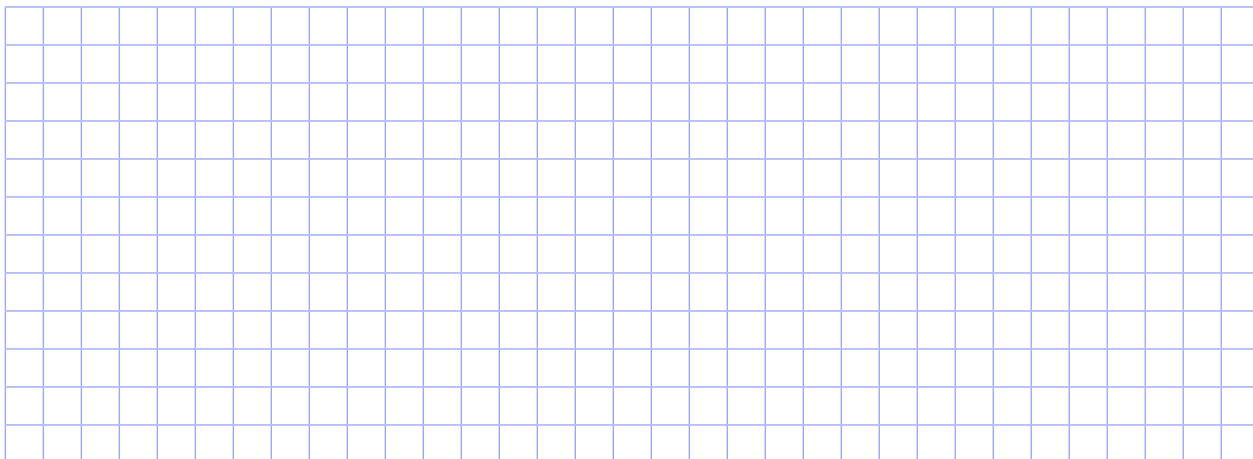
Розв'яжемо запропоновані вище вправи за допомогою тригонометричної підстановки.

A full-page sheet of graph paper. The background is a solid light gray color. Overlaid on this is a uniform grid of thin, light blue horizontal and vertical lines. These lines intersect to form a series of small, identical squares across the entire page, providing a guide for writing or drawing.

[illegible]



Приклад 6. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$$



V. Доведення нерівностей з використанням тригонометричних підстановок

Також іноді тригонометричні підстановки використовуються при доведенні нерівностей.

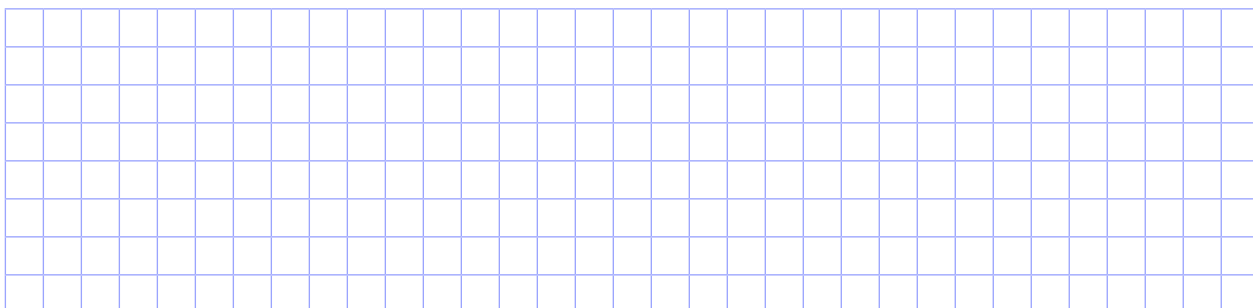
Приклад 7. Доведіть нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$ за допомогою тригонометричної підстановки.

Доведення. Оскільки $a, b \in [-1; 1]$, то нехай $a = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $b = \sin \beta$, де

$$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тоді дана нерівність перепишеться у вигляді: $\sin \alpha |\cos \beta| + \sin \beta |\cos \alpha| \leq 1$,
 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \leq 1$, $\sin(\alpha + \beta) \leq 1$, що правильно для будь-яких значень α і β .

Приклад 8. Числа a, b, c та d задовольняють умови $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. За допомогою тригонометричної підстановки доведіть, що $|ac - bd| \leq 1$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Вхідна інформація розподіляється між серверами № 1 і № 2 та обробляється на них. Із сервера № 1 за обсягу вхідної інформації t^2 Гб на виході $20t$ Гб, а із сервера № 2 за такого самого обсягу вхідної інформації на виході $21t$ Гб обробленої інформації, де $25 \leq t \leq 55$. Який найбільший обсяг вихідної інформації можна отримати за загального обсягу вхідної інформації 3364 Гб?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = x$ за допомогою тригонометричної підстановки.
2. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{1-x^2} + x)^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.
3. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{4}}{2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.
4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3}. \end{cases}$
5. Відомо, що $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $mp + nq = 0$. Обчисліть $mn + pq$.
6. Серед усіх розв'язків системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$ знайдіть такі розв'язки, при яких вираз $x + z$ набуває найбільшого значення.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.
2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$
3. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $x + y$, якщо $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.
5. Розв'яжіть рівняння $8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0$.
6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (4x^3 - 3x)^6 + (4y^3 - 3y)^6 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

7. Знайдіть усі значення параметра a при яких система $\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має розв'язок.
8. Доведіть, що $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}$.
9. Доведіть, що при будь-яких x, y виконується нерівність $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.
10. Розв'яжіть рівняння $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$.
11. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2}$.
12. Відомо, що $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $z = x^2 + xy + y^2$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2-1)$.
2. Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{2}|x|(x^2-1)(2x^4-4x^2+1)=1$.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=4y^3, \\ y+3z=4z^3, \\ z+3x=4x^3. \end{cases}$
4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3y+xy^3=1, \\ x^2-y^2=\sqrt{3}. \end{cases}$
5. Доведіть, що з будь-яких п'яти різних чисел завжди можна вибрати такі два числа x і y , що $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$.
6. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ належать проміжку $[-1; 1]$, причому сума їхніх кубів дорівнює 0. Доведіть, що $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$.
7. **Творче завдання.** Розв'яжіть завдання, які розв'язували на уроці, без використання тригонометричної підстановки.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Порівняння різних способів розв'язування алгебричних задач: за допомогою тригонометричної підстановки і без неї.
2. Зведення тригонометричних рівнянь до алгебричних за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
3. Класифікація алгебричних виразів для яких доцільно застосувати тригонометричну підстановку.
4. Розв'язування алгебричних задач з параметром за допомогою тригонометричної підстановки.
5. Порівняння розв'язування алгебричних задач за допомогою тригонометричних підстановок за допомогою різних систем штучного інтелекту.







