

**Урок 30. Урок–практикум.
Тригонометрична підстановка**

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Принцип застосування тригонометричної підстановки.
2. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь з використанням тригонометричної підстановки.
3. Доведення нерівностей з використанням тригонометричної підстановки.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 MAO 1.2.1–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 MAO 2.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 MAO 3.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому по вигляду виразу $\sqrt{a^2 - x^2}$ можна зробити висновок про використання тригонометричної підстановки?

2) Чи завжди тригонометрична підстановка є найкращим способом розв'язування задачі?

3) Чи можна вважати тригонометричну підстановку своєрідним містком між алгеброю і геометрією?

4) Які помилки виникають при заміні змінних, зокрема при використанні тригонометричної підстановки?

5) Чим тригонометрична підстановка відрізняється від звичайної заміни змінних?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Відповідь. $[-1; 1]$.

2. Обчисліть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Відповідь. $-\frac{4}{3}$.

3. Обчисліть $\cos 3\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $-\frac{23}{27}$.

4. Обчисліть значення виразу $4\sin^2 \alpha$, якщо $4\cos^2 \alpha = 1$.

Відповідь. 3.

5. Спростіть вираз $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha$.

Відповідь. $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Вхідна інформація розподіляється між серверами № 1 і № 2 та обробляється на них. Із сервера № 1 за обсягу вхідної інформації t^2 Гб на виході $20t$ Гб, а із сервера № 2 за такого самого обсягу вхідної інформації на виході $21t$ Гб обробленої інформації, де $25 \leq t \leq 55$. Який найбільший обсяг вихідної інформації можна отримати за загального обсягу вхідної інформації 3364 Гб?

III. Принцип застосування тригонометричної підстановки

При розв'язуванні деяких алгебричних задач (здебільшого олімпіадних або конкурсних) зручно замінити змінну (або змінні, якщо їх кілька) тригонометричною функцією і звести таким чином алгебричну задачу до тригонометричної. Такі заміни — тригонометричні підстановки, істотно спрощують розв'язання. Вибір тієї чи іншої функції при цьому залежить від вигляду рівняння, системи рівнянь або алгебричного виразу, який потрібно спростити. Наприклад, якщо з умови випливає, що допустимі значення змінної x визначаються нерівністю $|x| \leq 1$, то зручною є підстановка $x = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

або $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$. Яку з них вибрати, залежить від конкретної задачі.

У випадках, коли змінна може набувати будь-яких значень, то використовують заміни $x = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ або $x = \operatorname{ctg} \alpha$, де $\alpha \in (0; \pi)$.

Деякі типові ситуації для застосування тригонометричних підстановок

1. У виразах виду $\sqrt{a^2 - x^2}$ доцільно використати підстановки $x = a \cos \alpha$ або $x = a \sin \alpha$.
2. У виразах виду $\sqrt{x^2 - a^2}$ доцільно використати підстановки $x = \frac{a}{\cos \alpha}$ або $x = \frac{a}{\sin \alpha}$.
3. Вирази $\sqrt{x^2 + a^2}$ указують на підстановки $x = a \operatorname{tg} \alpha$ або $x = a \operatorname{ctg} \alpha$.
4. У виразах $\sqrt{2x^2 - 1}$ та $\sqrt{1 - 2x^2}$ можна використати підстановки $x = \cos \alpha$ та $x = \sin \alpha$ відповідно, а далі скористатися формулою косинуса подвійного аргументу.
5. Вираз $\frac{2x}{1 - x^2}$ подібний до формули тангенса подвійного аргументу, тому доцільно спробувати підстановку $x = \operatorname{tg} \alpha$.
6. Вирази $\frac{x + y}{1 - xy}$ та $\frac{x - y}{1 + xy}$ нагадують формули тангенса суми та тангенса різниці відповідно, тому варто використати подвійну підстановку $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$.

Ілюстративні приклади

6. Яку тригонометричну підстановку доцільно використати для рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$ і чому?

Розв'язання. Оскільки з умови випливає, що $x \in [-1; 1]$, то доцільно використати заміну $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ або $x = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Проте, оскільки $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos 3\alpha$, то доцільно скористатися саме підстановкою $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$.

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha, \quad |\sin \alpha| = \cos 3\alpha.$$

Оскільки $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha = \cos 3\alpha$.

Відповідь. $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$.

7. Оберіть тригонометричну підстановку для рівняння $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 1 > 0$, то $|x| > 1$. Зауважимо, що від'ємне значення змінної не може бути розв'язком задачі. Справді, перетворимо початкове рівняння до вигляду $x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{35}{12}$.

Множник у дужках у лівій частині рівняння є додатним, права частина рівняння також додатна, тому множник x у лівій частині рівняння не може бути від'ємним.

Отже, $x > 1$, тоді $\frac{1}{x} \in (0; 1)$, тому можна скористатися підстановкою

$$x = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Початкове рівняння перепишеться у вигляді $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{35}{12}$.

Відповідь. $x = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Оберіть тригонометричну підстановку для рівняння $16x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = 3$.

Розв'язання. Оскільки змінна x може набувати будь-яких дійсних значень, то можна зробити підстановку $x = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тоді $2x^2 + 1 = 2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1$, $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{|\cos \alpha|} = \frac{1}{\cos \alpha}$, оскільки $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тоді початкове рівняння набуде вигляду $16\operatorname{tg} \alpha (2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \frac{1}{\cos \alpha} = 3$.

Відповідь. $x = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Оберіть тригонометричну підстановку для розв'язування системи рівнянь
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки сума квадратів чисел x і y дорівнює одиниці, то кожне з цих чисел за модулем не перевищує одиниці і їх можна розглядати як синус та косинус деякого кута. Тому можна зробити підстановку $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$. Друге рівняння системи набуде вигляду $4 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) = 1$, звідки $\sin 4\alpha = 1$.

Відповідь. $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$.

IV. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь з використанням тригонометричної підстановки

Розв'яжемо запропоновані вище вправи за допомогою тригонометричної підстановки.

Ілюстративні приклади

10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Розв'язання. Оскільки з умови випливає, що $x \in [-1; 1]$, то доцільно використати заміну $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ або $x = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Проте, оскільки

$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$, то доцільно скористатися саме підстановкою $x = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$.

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \quad |\sin \alpha| = \cos 3\alpha.$$

Оскільки $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha = \cos 3\alpha$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos 3\alpha = 0, \quad -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0,$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2\alpha - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Умові $\alpha \in [0; \pi]$ задовольняють корені: $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{8}$, $\alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$.

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Розв'яжіть рівняння $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 1 > 0$, то $|x| > 1$. Зауважимо, що від'ємне значення змінної не може бути розв'язком задачі. Справді, перетворимо початкове рівняння до вигляду $x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{35}{12}$.

Множник у дужках у лівій частині рівняння є додатним, права частина рівняння також додатна, тому множник x у лівій частині рівняння не може бути від'ємним.

Отже, $x > 1$, тоді $\frac{1}{x} \in (0; 1)$, тому можна скористатися підстановкою

$$x = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

Початкове рівняння перепишеться у вигляді $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{35}{12}$.

Оскільки $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, то $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha > 0$, тому останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{35}{12}, \quad \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{35}{12}.$$

Нехай $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, $\sin \alpha \cos \alpha = b$, тоді $\begin{cases} 12a = 35b, \\ a^2 - 1 = 2b. \end{cases}$

$$\text{Звідки } \begin{cases} a = \frac{7}{5}, \\ b = \frac{12}{25}. \end{cases}$$

Числа $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$ є коренями рівняння $t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} = 0$.

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{3}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{4}{5}, \\ \sin \alpha = \frac{4}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

Відповідь. $\frac{5}{3}, \frac{5}{4}$.

12. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки сума квадратів чисел x і y дорівнює одиниці, то кожне з цих чисел за модулем не перевищує одиниці і їх можна розглядати як синус та косинус

деякого кута. Тому можна зробити підстановку $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$. Друге рівняння системи набуде вигляду $4 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) = 1$, звідки $\sin 4\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Умову $\alpha \in [0; 2\pi)$ задовольняють чотири значення:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \\ \alpha_3 = \frac{9\pi}{8}, \\ \alpha_4 = \frac{13\pi}{8}. \end{cases}$$

$$x_1 = \sin \alpha_1 = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, \quad y_1 = \cos \alpha_1 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$x_2 = \sin \alpha_2 = \sin \frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \cos \alpha_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$x_3 = \sin \alpha_3 = \sin \frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, \quad y_3 = \cos \alpha_3 = \cos \frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$x_4 = \sin \alpha_4 = \sin \frac{13\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}, \quad y_4 = \cos \alpha_4 = \cos \frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right),$
 $\left(-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \right).$

V. Доведення нерівностей з використанням тригонометричних підстановок

Також іноді тригонометричні підстановки використовується при доведенні нерівностей.

Ілюстративні приклади

- 13.** Доведіть нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$ за допомогою тригонометричної підстановки.

Доведення. Оскільки $a, b \in [-1; 1]$, то нехай $a = \sin \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $b = \sin \beta$, де $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді дана нерівність переписеться у вигляді: $\sin \alpha |\cos \beta| + \sin \beta |\cos \alpha| \leq 1$,
 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \leq 1$, $\sin(\alpha + \beta) \leq 1$, що правильно для будь-яких значень α і β .

- 14.** Числа a, b, c та d задовольняють умови $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$. За допомогою тригонометричної підстановки доведіть, що $|ac - bd| \leq 1$.

Доведення. Оскільки $a^2 + b^2 = 1$, то існує кут α такий, що $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$.

Аналогічно існує кут β такий, що $c = \cos \beta, d = \sin \beta$.

$|ac - bd| = |\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta| = |\cos(\alpha + \beta)| \leq 1$, що й треба було довести.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Вхідна інформація розподіляється між серверами № 1 і № 2 та обробляється на них. Із сервера № 1 за обсягу вхідної інформації t^2 Гб на виході $20t$ Гб, а із сервера № 2 за такого самого обсягу вхідної інформації на виході $21t$ Гб обробленої інформації, де $25 \leq t \leq 55$. Який найбільший обсяг вихідної інформації можна отримати за загального обсягу вхідної інформації 3364 Гб?

Розв'язання. Позначимо вхідну інформацію на обох серверах як x^2 та y^2 відповідно, при умовах $x^2 + y^2 = 3364 = 58^2, 25 \leq x \leq 55, 25 \leq y \leq 55$.

Необхідно знайти найбільше значення суми $S = 20x + 21y$.

Нехай $x = 58 \cos \alpha, y = 58 \sin \alpha$.

$$\begin{aligned} S &= 58 \cdot (20 \cos \alpha + 21 \sin \alpha) = 58 \cdot \sqrt{20^2 + 21^2} \left(\frac{20}{\sqrt{20^2 + 21^2}} \cos \alpha + \frac{21}{\sqrt{20^2 + 21^2}} \sin \alpha \right) = \\ &= 58 \cdot 29 \cdot \left(\frac{20}{29} \cos \alpha + \frac{21}{29} \sin \alpha \right) = 1682 \sin(\alpha + \varphi), \text{ де } \varphi \text{ — такий кут, що } \sin \varphi = \frac{20}{29}, \\ \cos \varphi &= \frac{21}{29}, \text{ при умовах, що } \frac{25}{58} \leq \sin \alpha \leq \frac{55}{58} \text{ і } \frac{25}{58} \leq \cos \alpha \leq \frac{55}{58}. \end{aligned}$$

Найбільше значення S буде дорівнювати 1682 при $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

У цьому випадку $\sin \alpha = \cos \varphi = \frac{21}{29}, \cos \alpha = \sin \varphi = \frac{20}{29}$ і обмеження на $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ виконуються.

Відповідь. 1682 Гб.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2} = x$ за допомогою тригонометричної підстановки.
- Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{1-x^2} + x)^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.
- Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{4}}{2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3}. \end{cases}$
5. Відомо, що $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $mp + nq = 0$. Обчисліть $mn + pq$.
6. Серед усіх розв'язків системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$ знайдіть такі розв'язки, при яких вираз $x + z$ набуває найбільшого значення.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ за допомогою тригонометричної підстановки.
2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$
3. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $x + y$, якщо $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.
5. Розв'яжіть рівняння $8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0$.
6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (4x^3 - 3x)^6 + (4y^3 - 3y)^6 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
7. Знайдіть усі значення параметра a при яких система $\begin{cases} xy(2x^2 - a^2) = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має розв'язок.
8. Доведіть, що $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}$.
9. Доведіть, що при будь-яких x, y виконується нерівність $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.
10. Розв'яжіть рівняння $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1) = 1$.
11. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2}$.
12. Відомо, що $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $z = x^2 + xy + y^2$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.
2. Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{2}|x|(x^2-1)(2x^4-4x^2+1) = 1$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y = 4y^3, \\ y + 3z = 4z^3, \\ z + 3x = 4x^3. \end{cases}$$
4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^3 y + xy^3 = 1, \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3}. \end{cases}$$
5. Доведіть, що з будь-яких п'яти різних чисел завжди можна вибрати такі два числа x і y , що $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$.
6. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ належать проміжку $[-1; 1]$, причому сума їхніх кубів дорівнює 0. Доведіть, що $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$.
7. **Творче завдання.** Розв'яжіть завдання, які розв'язували на уроці, без використання тригонометричної підстановки.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Порівняння різних способів розв'язування алгебричних задач: за допомогою тригонометричної підстановки і без неї.
2. Зведення тригонометричних рівнянь до алгебричних за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

3. Класифікація алгебричних виразів для яких доцільно застосувати тригонометричну підстановку.
4. Розв'язування алгебричних задач з параметром за допомогою тригонометричної підстановки.
5. Порівняння розв'язування алгебричних задач за допомогою тригонометричних підстановок за допомогою різних систем штучного інтелекту.