

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 4. Рівняння $\sin x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

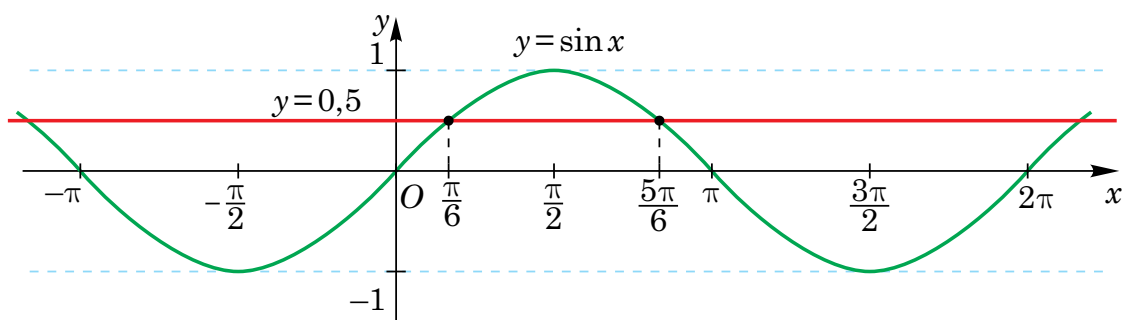
- 1) розглянете графічний метод розв'язування рівняння $\sin x = a$;
- 2) дізнаєтесь формулу для розв'язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$;
- 3) дізнаєтесь означення арксинуса;
- 4) вивчите загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть нулі функції.
2. У яких точках функція $y = \sin x$ набуває свого найбільшого значення?
3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.
4. Перетворіть добуток $2\sin x \cos 3x$ у суму.
5. Числову послідовність задано формулою $a_n = (-1)^n n^2$. Запишіть шість її перших членів.

III. Графічний метод розв'язування рівняння $\sin x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = a$.

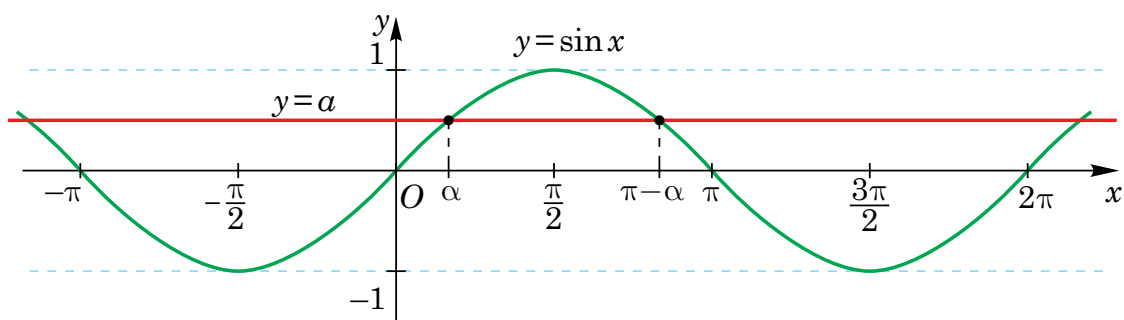


Оскільки множина значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $a > 1$ і при $a < -1$ рівняння коренів не матиме.

Щоб зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\sin x = a$ у загальному випадку, розв'яжемо рівняння $\sin x = 0,5$ графічно (див. рисунок).

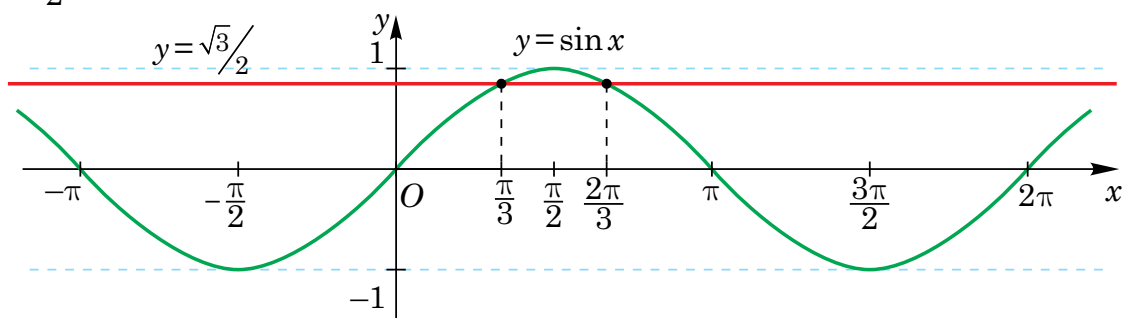
Пряма $y = 0,5$ має з графіком функції $y = \sin x$ нескінченну кількість точок перетину, абсциси яких мають вигляд $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ та $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо число 0,5 замінити на будь-яке інше число із проміжку $(-1; 1)$, то хід розв'язання буде аналогічний: $x = \alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, та $x = (\pi - \alpha) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, де α — один із таких кутів, що $\sin \alpha = a$ (див. рисунок).



Приклад 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (див. рисунок).



Одним із кутів, синус якого дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, є кут $\frac{\pi}{3}$, а також кут $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ є розв'язком даного рівняння. Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною, з головним періо-

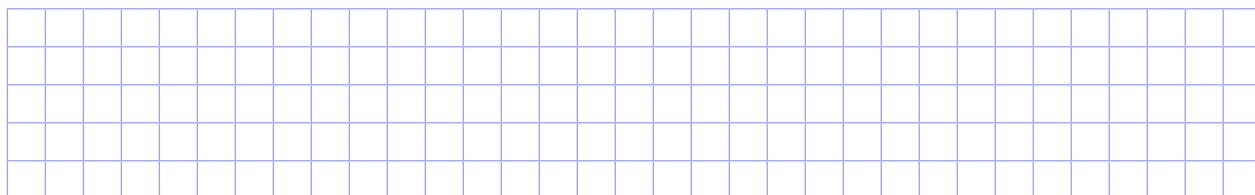
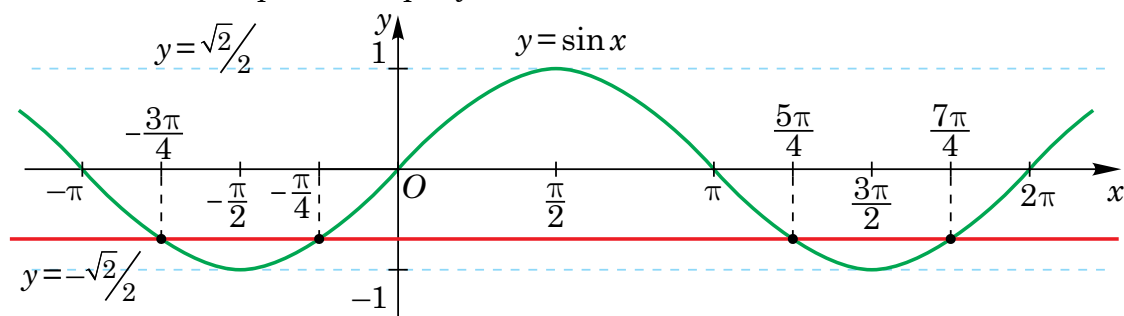
дом 2π , то коренями даного рівняння будуть усі числа виду $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ та

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 2. Розв'яжіть графічно рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Використайте рисунок.



IV. Особливі випадки при розв'язуванні рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1, a = -1, a = 0$ (3 хв)

1) Функція $y = \sin x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, у точках вигляду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = 1$.

2) Функція $y = \sin x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1, у точках вигляду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = -1$.

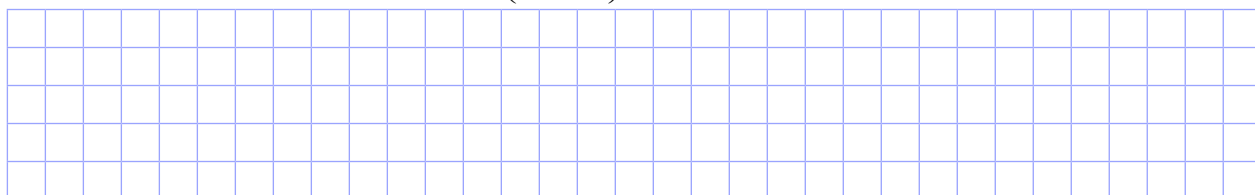
3) Нулями функції $y = \sin x$ є числа вигляду $\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = 0$.

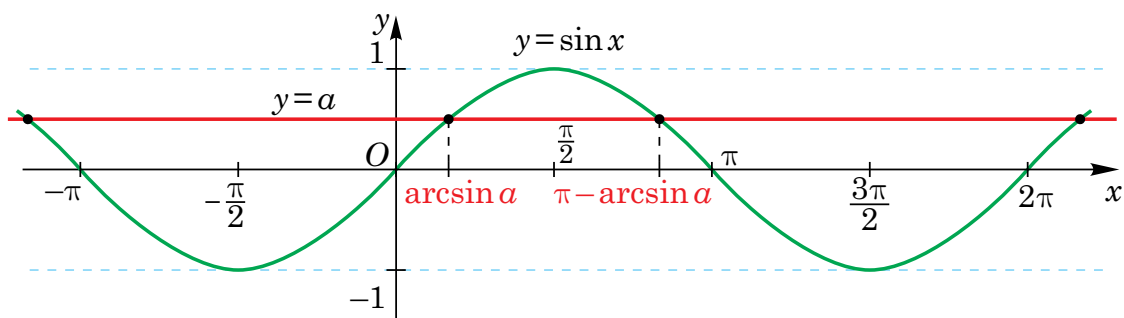
Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = -1$.

Розв'язання. $\sin 3x = -1, 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.



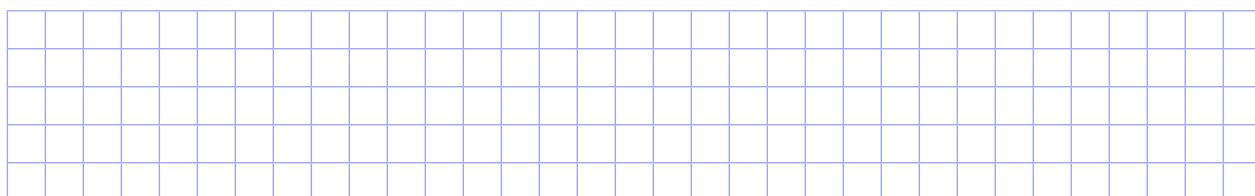


Особливі випадки:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Оскільки особливі випадки зустрічаються досить часто, то варто запам'ятати кожен із них.

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{1}{5}$.



VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Катаючись на колесі огляду, інженер установив, що залежність висоти h (у метрах) підйому від часу t (у секундах), проведеному на атракціоні описується функцією $h(t) = 21 + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right)$. Установить через скільки секунд після початку руху спостерігач, який робить одне повне коло, буде знаходитись на висоті 31 м. За потреби для наближеного обчислення візьміть $\pi \approx 3,14$.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}) = 0$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); & 2) \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 3) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right); \\ 4) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 5) \arcsin 1; & 6) \arcsin(-1). \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 3) \sin x = 1; \quad 4) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \sin x = -1; \quad 4) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = 0,1; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{6}; \quad 3) \sin x = -\sqrt{1,01}; \quad 4) \sin x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin 5x = 0.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin \frac{x}{3} = 0.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin(2-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = -\frac{1}{2}; \quad 3) \sin(2-3x) = -1; \quad 4) \sin(1-3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{3\pi x}{4} = 0; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{8}; \quad 3) \sin x = -1,01; \quad 4) \sin x = \sqrt{1,2}.$$

3. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin 2x = -2a^2 + 5a - 2$ має розв'язки?

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \sin \frac{2\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin(2-3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; & 2) \sin x = \frac{\pi}{4}; \\ 3) \sin \frac{2\pi x}{3} = 0; & 4) \sin 3x = \sqrt{\pi}. \end{array}$$

7. Розв'яжіть рівняння, за формулами синуса подвійного аргументу:

1) $\sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{8}$.

8. Розв'яжіть рівняння, за формулами синуса суми та різниці:

1) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x \sin 5x - \sin 2x \cos 5x = -\frac{1}{4}$.

9. Укажіть корені рівняння, як належать проміжку $[-2\pi; 2\pi]$:

1) $2\sin x = 1$; 2) $2\sin x = \sqrt{3}$; 3) $2\sin x = -\sqrt{2}$; 4) $2\sin x = -1$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{6} + 2\right) = -1$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{8} + 3x\right) = 1$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 2) $\cos 2\pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin(\sin x) = \frac{1}{2}$; 4) $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 16)\sin x = a - 3$?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $6\sin^2 x - 5\sin x - 1 = 0$; 2) $3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x + a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?

5. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше від чотирьох коренів рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

6. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язування рівняння $\sin x = a$.

Рефлексія

1. Я розумію графічний метод розв'язування рівняння $\sin x = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю формулу для розв'язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 3.** Я знаю означення арксинуса.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я знаю загальну формулу для розв'язування рівняння $\sin x = a$.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Розв'язування рівнянь $\sin x = a$ за допомогою одиничного кола.
- 2.** Історія виникнення та розвитку тригонометричних рівнянь.
- 3.** Методи наближеного розв'язування рівняння $\sin x = a$.
- 4.** Використання рівняння $\sin x = a$ як моделі в задачах прикладного змісту.
- 5.** Графічне моделювання розв'язків рівняння $\sin x = a$ у Geogebra або в Desmos.







