

11

Тема 3. Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 4. Рівняння $\sin x = a$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Графічний метод розв'язання рівняння $\sin x = a$.
2. Особливі випадки рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$.
3. Означення арксинуса числа a .
4. Загальна формула коренів рівняння $\sin x = a$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає типи можливих результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) У яких практичних задачах може знадобитися вміння знаходити кут за значенням його синуса?

2) Чи суттєво відрізнятиметься принцип графічного розв'язання рівняння $\sin x = a$ від розв'язання рівняння $\cos x = a$?

3) Чому рівняння $\sin x = a$ виникає в задачах про гармонічні коливання?

4) Чи можна визначити всі корені рівняння $\sin x = a$, якщо відомий один із них?

5) Для рівняння $\cos x = a$ ми вводили поняття арккосинуса. Чи є аналогічне поняття для рівняння $\sin x = a$?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть нулі функції.

Відповідь. πn , $n \in \mathbb{Z}$.

2. У яких точках функція $y = \sin x$ набуває свого найбільшого значення?

Відповідь. πn , $n \in \mathbb{Z}$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Перетворіть добуток $2\sin x \cos 3x$ у суму.

Відповідь. $\sin 4x - \sin 2x$.

5. Числову послідовність задано формулою $a_n = (-1)^n n^2$. Запишіть шість її перших членів.

Відповідь. $-1; 4; -9; 16; -25; 36$.

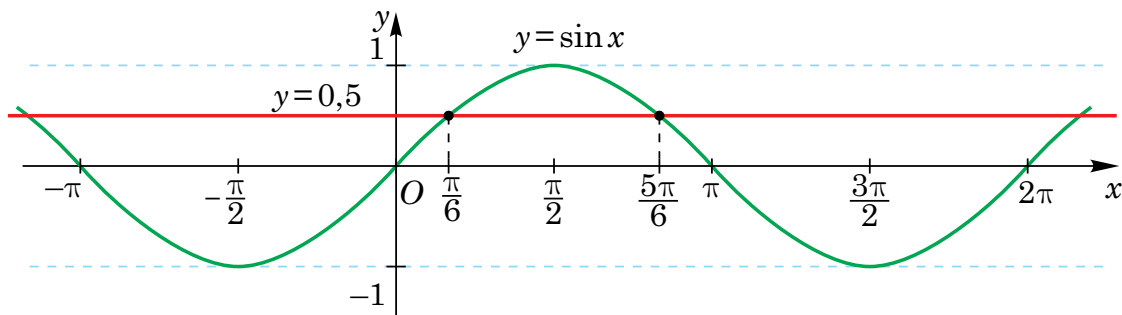
Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Катаючись на колесі огляду, інженер установив, що залежність висоти h (у метрах) підйому від часу t (у секундах), проведеному на атракціоні описується функцією $h(t) = 21 + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right)$. Установіть через скільки секунд після початку руху спостерігач, який робить одне повне коло, буде знаходитись на висоті 31 м. За потреби для наближеного обчислення візьміть $\pi \approx 3,14$.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}) = 0$.

III. Графічний метод розв'язування рівняння $\sin x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = a$.

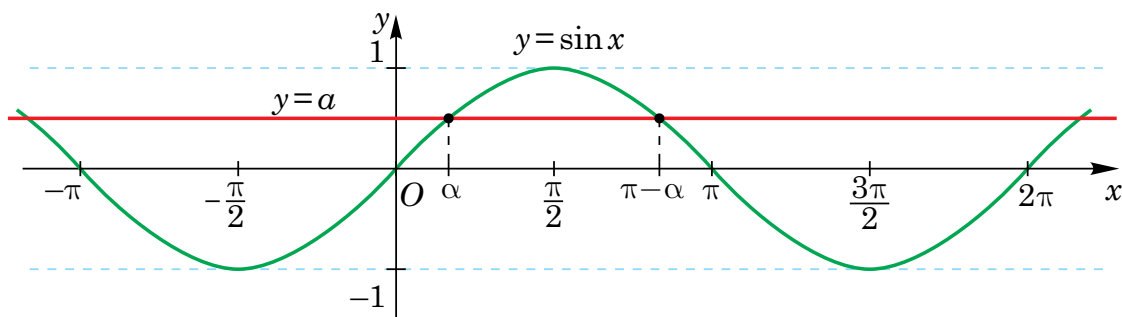


Оскільки множина значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $a > 1$ і при $a < -1$ рівняння коренів не матиме.

Щоб зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\sin x = a$ у загальному випадку, розв'яжемо рівняння $\sin x = 0,5$ графічно (див. рисунок).

Пряма $y = 0,5$ має з графіком функції $y = \sin x$ нескінченну кількість точок перетину, абсциси яких мають вигляд $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ та $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

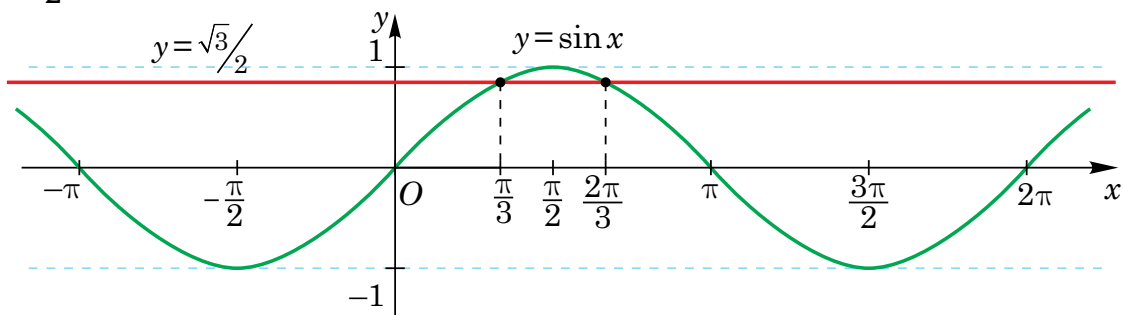
Якщо число 0,5 замінити на будь-яке інше число із проміжку $(-1; 1)$, то хід розв'язання буде аналогічний: $x = \alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, та $x = (\pi - \alpha) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, де α — один із таких кутів, що $\sin \alpha = a$ (див. рисунок).



Ілюстративні приклади

- 6.** Розв'яжіть графічно рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (див. рисунок).

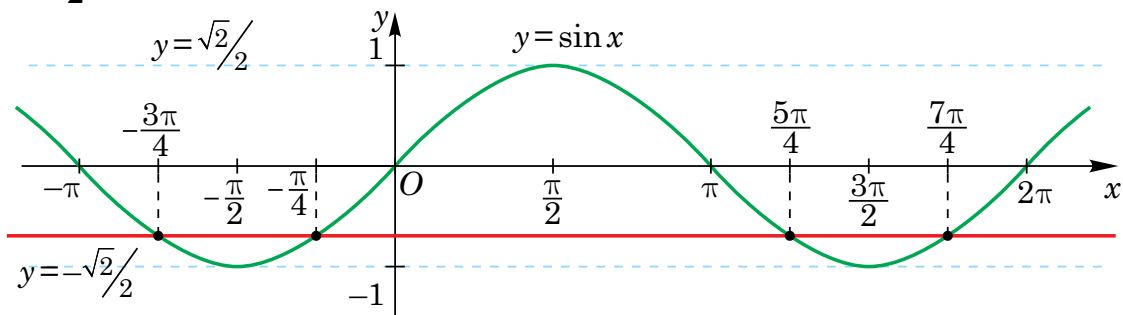


Одним із кутів, синус якого дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, є кут $\frac{\pi}{3}$, а також кут $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ є розв'язком даного рівняння. Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною, з головним періодом 2π , то коренями даного рівняння будуть усі числа виду $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ та $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 7.** Розв'яжіть графічно рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рисунок).



Одним із кутів, синус якого дорівнює $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, є кут $-\frac{\pi}{4}$, а також кут $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$ є розв'язком даного рівняння. Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною, з головним періодом 2π , то коренями даного рівняння будуть усі числа виду $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ та $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

IV. Особливі випадки при розв'язуванні рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1, a = -1, a = 0$ (3 хв)

1) Функція $y = \sin x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, у точках вигляду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = 1$.

2) Функція $y = \sin x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 , у точках вигляду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = -1$.

3) Нулями функції $y = \sin x$ є числа вигляду $\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\sin x = 0$.

Ілюстративні приклади (3–5 хв)

8. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = -1$.

Розв'язання. $\sin 3x = -1, 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

9. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Розв'язання. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, 2x - \frac{\pi}{6} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

10. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язання. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

V. Означення арксинуса числа a

Означення. Арксинусом числа a , де $-1 \leq a \leq 1$, називають кут α , де $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, синус якого дорівнює a , тобто $\sin \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса.

1. Для $-1 \leq a \leq 1$ існує єдине значення арксинуса.
2. Для $|a| > 1$ значень арксинуса не існує, тобто вирази $\arcsin \sqrt{2}$, $\arcsin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\arcsin 1,2$, $\arcsin(-4)$ не мають змісту.
3. Якщо $|a| \leq 1$, то $\sin(\arcsin a) = a$.
4. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Ілюстративні приклади

11. Обчисліть $\arcsin \frac{1}{2}$.

Розв'язання. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ і $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

12. Обчисліть $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Розв'язання. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$,

оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ і $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}$.

13. Чи є правильною рівність $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$?

Розв'язання. Хоча $\sin \left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, проте $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому рівність $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$ —

неправильна.

Відповідь. Ні.

VI. Загальна формула коренів рівняння $\sin x = a$

Таким чином, у загальному, розв'язками рівняння $\sin x = a$, де $-1 \leq a \leq 1$, є дві множини: $x = \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, та $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

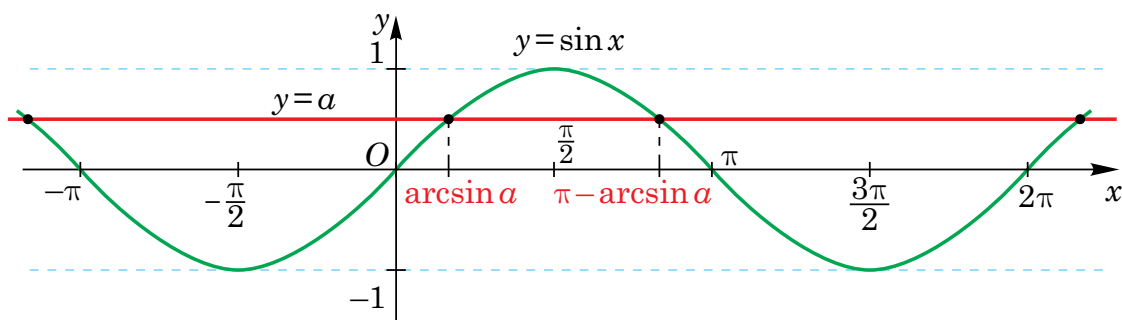
Множини коренів можна записати так:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ та } x = -\arcsin a + (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Тобто, якщо біля числа π множником є парне ціле число, то арксинус беремо зі знаком «+», а коли непарне, то арксинус беремо зі знаком «-».

Отже, загальна формула коренів рівняння має вигляд:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Особливі випадки:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Оскільки особливі випадки зустрічаються досить часто, то варто запам'ятати кожен із них.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 14.** Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{1}{5}$.

Розв'язання. $\sin x = \frac{1}{5}, x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $(-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

- 15.** Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. $\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{x}{2} - 3 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{2} = 3 + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = 6 + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $6 + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

- 16.** Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. $\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{x}{2} - 3 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{x}{2} = 3 + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = 6 + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $6 + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Катаючись на колесі огляду, інженер установив, що залежність висоти h (у метрах) підйому від часу t (у секундах), проведеному на атракціоні описується функцією $h(t) = 21 + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right)$. Установіть через скільки секунд після початку руху спостерігач, який робить одне повне коло, буде знаходитись на висоті 31 м. За потреби для наближеного обчислення візьміть $\pi \approx 3,14$.

Розв'язання. За умовою, $21 + 20 \sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right) = 31$, $20 \sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right) = 10$,

$$\sin\left(\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} \frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{\pi t}{90} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - 45 = 15 + 180n, \\ t - 45 = 75 + 180n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{t}{90} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + 2n, \\ \frac{t}{90} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + 2n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 60 + 180n, \\ t = 120 + 180n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким чином, на висоті 31 м спостерігач знаходитиметься через 60 с і через 120 с після початку руху.

Відповідь. Через 60 с і через 120 с.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}) = 0$.

Розв'язання. Для наборів чисел $(1; 1)$ та $(\sqrt{x}; \sqrt{7-x})$ застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $(\sqrt{x} + \sqrt{7-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{7-x})^2)$, $(\sqrt{x} + \sqrt{7-x})^2 \leq 14$.

Оскільки $x \in [0; 7]$, то можна зробити висновок, що $\sqrt{7} \leq \sqrt{x} + \sqrt{7-x} \leq \sqrt{14}$.

$$\sin(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}) = 0, \quad \sqrt{x} + \sqrt{7-x} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Можливий лише випадок $\sqrt{x} + \sqrt{7-x} = \pi$.

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{7-x} + 7 - x = \pi^2, \quad 4x(7-x) = (\pi^2 - 7)^2, \quad 4x^2 - 28x + (\pi^2 - 7)^2 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 196 - 4(\pi^2 - 7)^2 = 196 - 4\pi^4 + 56\pi^2 - 196 = 4\pi^2(14 - \pi^2),$$

$$x_1 = \frac{14 + 2\pi\sqrt{14 - \pi^2}}{4} = \frac{7 + \pi\sqrt{14 - \pi^2}}{2}, \quad x_2 = \frac{14 - 2\pi\sqrt{14 - \pi^2}}{4} = \frac{7 - \pi\sqrt{14 - \pi^2}}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{7 \pm \pi\sqrt{14 - \pi^2}}{2}.$$

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); & 2) \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 3) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right); \\ 4) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 5) \arcsin 1; & 6) \arcsin(-1). \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 3) \sin x = 1; \quad 4) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \sin x = -1; \quad 4) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = 0,1; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{6}; \quad 3) \sin x = -\sqrt{1,01}; \quad 4) \sin x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin 5x = 0.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin \frac{x}{3} = 0.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin(2-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = -\frac{1}{2}; \quad 3) \sin(2-3x) = -1; \quad 4) \sin(1-3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{3\pi x}{4} = 0; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{8}; \quad 3) \sin x = -1,01; \quad 4) \sin x = \sqrt{1,2}.$$

3. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin 2x = -2a^2 + 5a - 2$ має розв'язки?

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \sin \frac{2\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin(2-3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; & 2) \sin x = \frac{\pi}{4}; \\ 3) \sin \frac{2\pi x}{3} = 0; & 4) \sin 3x = \sqrt{\pi}. \end{array}$$

7. Розв'яжіть рівняння, за формулами синуса подвійного аргументу:

1) $\sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{8}$.

8. Розв'яжіть рівняння, за формулами синуса суми та різниці:

1) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x \sin 5x - \sin 2x \cos 5x = -\frac{1}{4}$.

9. Укажіть корені рівняння, як належать проміжку $[-2\pi; 2\pi]$:

1) $2\sin x = 1$; 2) $2\sin x = \sqrt{3}$; 3) $2\sin x = -\sqrt{2}$; 4) $2\sin x = -1$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{6} + 2\right) = -1$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{8} + 3x\right) = 1$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 2) $\cos 2\pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin(\sin x) = \frac{1}{2}$; 4) $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 16)\sin x = a - 3$?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $6\sin^2 x - 5\sin x - 1 = 0$; 2) $3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x + a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?

5. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше від чотирьох коренів рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

6. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм розв'язування рівняння $\sin x = a$.

IX. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію графічний метод розв'язування рівняння $\sin x = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю формулу для розв'язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 3. | Я знаю означення арксинуса. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю загальну формулу для розв'язування рівняння $\sin x = a$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Розв'язування рівнянь $\sin x = a$ за допомогою одиничного кола.
2. Історія виникнення та розвитку тригонометричних рівнянь.
3. Методи наближеного розв'язування рівняння $\sin x = a$.
4. Використання рівняння $\sin x = a$ як моделі в задачах прикладного змісту.
5. Графічне моделювання розв'язків рівняння $\sin x = a$ у Geogebra або в Desmos.