

# Тема 3.

## Тригонометричні рівняння й нерівності

### Урок 5. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\sin x = a$

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили навички розв’язання рівняння  $\sin x = a$ , якщо  $a = 1$ ,  $a = -1$ ,  $a = 0$ ;
- 2) навчилися обчислювати значення арксинусів різних чисел;
- 3) навчилися розв’язувати рівняння виду  $\sin x = a$  із застосуванням загальної формули коренів;
- 4) навчилися використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

#### II. Повторення

1. Розв’яжіть рівняння  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
2. Обчисліть:  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$ .
3. При яких значеннях аргументу функція  $y = \sin x$  набуває найбільшого значення?
4. Знайдіть область визначення функції  $y = \operatorname{Atg} x$ .
5. Перетворіть вираз  $\sin x + \cos x$  у добуток, за формулою суми синусів.

#### III. Розв’язування рівняння $\sin x = a$ , якщо $a = 1$ , $a = -1$ , $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію  $y = \sin x$ .

- 1) Функція  $y = \sin x$  досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = 1$ .

виду  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = -1$ .

3) Нулями функції  $y = \sin x$  є числа виду  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  є коренями рівняння  $\sin x = 0$ .

Узагальнимо дані у вигляді таблиці.

|               |                                        |
|---------------|----------------------------------------|
| $\sin x = 1$  | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$  |
| $\sin x = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ |
| $\sin x = 0$  | $x = \pi n, n \in Z$                   |

**Примітка.** Рівняння виду  $\sin x = 0$ ,  $\sin x = 1$  та  $\sin x = -1$  зустрічаються дуже часто, тому хоча їх і можна розв'язати за допомогою універсальної формули  $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а потім розв'язок спростити, однак для швидшого і раціональнішого розв'язання краще вивчити ці особливі випадки напам'ять.

**Приклад 1.** Розв'яжіть рівняння  $\sin^2 4x = 1$ .

[illegible]

**Приклад 2.** Розв'яжіть рівняння  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = 0$ .

[illegible]

**Приклад 3.** Розв'яжіть рівняння  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$ .

*Розв'язання.* Скористаємось непарністю функції  $y = \sin x$  перепишемо дане рівняння у вигляді  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ,

$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

**Примітка.** Якщо у рівнянні  $\sin(kx + b) = a$ , коефіцієнт  $k$  — від’ємний, то варто перетворити його на додатний, використовуючи непарність функції  $y = \sin x$ , тобто перейти до рівняння  $\sin(-kx - b) = -a$ .

#### IV. Обчислення значень арксинусів чисел $a$

**Означення. Арксинусом** числа  $a$  ( $|a| \leq 1$ ) називають кут  $\alpha \left( -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$ , синус якого дорівнює  $a$ , тобто  $\sin \alpha = a$ .

## Основні властивості арккосинуса

- 1.** Для  $|a| \leq 1$  існує єдине значення арксинуса.
- 2.** Для  $|a| > 1$  значень арксинуса не існує, тобто вирази  $\arcsin \sqrt{2}$ ,  $\arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\arcsin 1, 2$ ,  $\arcsin(-4)$  не мають змісту.
- 3.** Якщо  $|a| \leq 1$ , то  $\sin(\arcsin a) = a$ .
- 4.**  $\arcsin(\sin x) = x$ , якщо  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 5.**  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ .

**Приклад 4.** Обчисліть:  $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ .

[illegible]

**Примітка.** Корисна тотожність:  $\arcsin(\sin x) = x$ , якщо  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Якщо  $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , то можна скористатися періодичністю функції  $y = \sin x$  і привести аргумент функції  $y = \arcsin(\sin x)$  у межі  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Приклад 5.** Обчисліть  $\arcsin(\sin 2)$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $2 > \frac{\pi}{2}$ , то не можна відразу застосовувати формулу  $\arcsin(\sin x) = x$ . Спочатку потрібно замінити  $\sin 2$  на синус числа, що належить відріzkу  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Зауважимо, що  $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{2}$ , звідки  $-\frac{3\pi}{2} < -2 < -\frac{\pi}{2}$  і  $-\frac{\pi}{2} < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$ .

Оскільки  $\sin(\pi - 2) = \sin 2$ , то за формулою  $\arcsin(\sin x) = x$  маємо  $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$ .

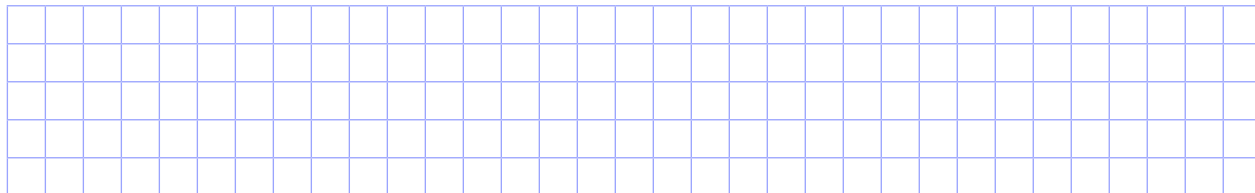
*Відповідь.*  $\pi - 2$ .

## V. Розв'язування рівнянь виду $\sin x = a$ із застосуванням загальної формули коренів

Запишемо загальну формулу коренів рівняння  $\sin x = a$ ,  $|a| \leq 1$ :

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 6.** Розв'яжіть рівняння  $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



## VI. Розв'язування практичної задачі

**Задача 1.** Популяція рідкісного виду метеликів у заповіднику змінюється циклічно протягом року внаслідок сезонних змін клімату та кормової бази. Чисельність популяції  $N(t)$  (у тисячах особин) моделюється функцією:  $N(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10$ , де

$t$  — час у місяцях ( $t = 0$  відповідає початку січня).

Визначте:

- 1) чисельність популяції метеликів у січні;
- 2) найбільшу та найменшу можливу чисельність популяції;
- 3) в які місяці чисельність популяції метеликів сягне значення 12,5 тисяч особин.

**Задача 2. Конкурсна задача.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2} \sin\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\pi x \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1}\right) = \sqrt{8}.$$

## VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

**1.** Обчисліть:

- 1)  $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ ;
- 2)  $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- 3)  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;
- 4)  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

**2.** Обчисліть:

- 1)  $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;
- 2)  $\cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;
- 3)  $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ ;
- 4)  $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

**3.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin 2x = 0$ ;      2)  $\sin \frac{x}{3} = 1$ ;      3)  $\sin 4x = -1$ ;      4)  $\sin \frac{x}{6} = -1$ .

**4.** Розв'язати рівняння:

1)  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ;      2)  $2\sin 7x = -1$ ;      3)  $2\sin \frac{x}{3} = \sqrt{3}$ ;      4)  $2\sin \frac{x}{4} = \sqrt{2}$ .

**5.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin 2x = \frac{1}{3}$ ;      2)  $\sin 3x = \frac{\pi}{2}$ ;      3)  $\sin 5x = \frac{\pi}{3}$ ;      4)  $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ .

**6.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1$ ;      2)  $2\sin\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$ ;  
3)  $2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{2} = 0$ ;      4)  $2\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$ .

### Рівень В

**1.** Обчисліть:

1)  $\sin(4\arcsin 1)$ ;      2)  $\cos(6\arcsin 1)$ ;      3)  $\sin\left(3\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;      4)  $\operatorname{tg}\left(2\arcsin \frac{1}{2}\right)$ .

**2.** Обчисліть:

1)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$ ;      2)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$ ;      3)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$ ;      4)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$ .

**3.** Обчисліть:

1)  $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$ ;      2)  $\sin\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}\right)$ ;  
3)  $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ ;      4)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ .

**4.** Чи має зміст вираз:

1)  $\arcsin(\sqrt{5} - 2)$ ;      2)  $\arcsin(2 - \sqrt{10})$ ;      3)  $\arcsin(\sqrt{5} - 3)$ ;      4)  $\operatorname{tg}\left(6\arcsin \frac{1}{2}\right)$ ?

**5.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ;      2)  $\sin\left(-\frac{x}{7} + \frac{2}{3}\right) = -1$ ;      3)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 0$ ;      4)  $\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) = 1$ .

**6.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin(-x) = \cos \frac{\pi}{3}$ ;      2)  $\sin(-x) = \sin \frac{\pi}{2}$ ;  
3)  $2\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$ ;      4)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ .

**7.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $1 - 4\sin x \cos x = 0$ ;      2)  $1 + 6\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0$ ;  
3)  $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0$ ;      4)  $1 - 8\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = 0$ .

8. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ .
9. Розв'яжіть рівняння:  
 1)  $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$ ;                      2)  $(4\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$ .
10. Знайдіть нулі функції  $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1,5$ .
11. Знайдіть корені рівняння  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , що задовольняють умову  $-\pi < x < 4\pi$ .
12. Знайдіть корені рівняння, що задовольняють заданій умові:  
 1)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, x > \pi$ ;                      2)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x > 0$ ;  
 3)  $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$ ;                      4)  $\sin 3x = -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ .

### Рівень С

1. Обчисліть:  
 1)  $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ ;                      2)  $\cos\left(\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin \frac{1}{3}\right)$ ;  
 3)  $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}\right)$ ;                      4)  $\sin\left(\arccos \frac{4}{5} + \arccos \frac{3}{5}\right)$ .
2. Обчисліть:  
 1)  $\sin\left(2\arcsin \frac{1}{3}\right)$ ;                      2)  $\cos\left(2\arcsin \frac{1}{4}\right)$ .
3. Розв'яжіть рівняння:  
 1)  $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$ ;                      2)  $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$ .
4. Розв'яжіть рівняння  $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
5. При яких значеннях параметра  $a$  має розв'язки рівняння  $(a + 4)\sin^2 2x = a^2 - 16$ ?
6. Доведіть рівність:  
 1)  $\arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ ;                      2)  $\arccos \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{24}\right)$ .
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка графічно ілюструє обчислення арксинуса.

### Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася .....
- .....
- .....

- 2) Мені найбільше запам'яталося . . . . .
- 3) Для мене було найцікавішим . . . . .
- 4) Для мене було найскладнішим . . . . .
- 5) Я припустився/припустилася помилки . . . . .
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти . . . . .
- 7) Поради собі до наступного уроку . . . . .

### Можливі теми проєктів

1. Розв'язки рівняння  $\sin x = a$  на різних проміжках.
2. Геометрична інтерпретація розв'язків рівняння  $\sin x = a$  на одиничному колі.
3. Використання комп'ютерних програм для розв'язування рівняння  $\sin x = a$ .
4. Використання рівняння  $\sin x = a$  у моделюванні коливальних процесів.
5. Рівняння  $\sin x = a$  у навігації та в астрономії.







