

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 5. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $\sin x = a$

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розв’язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$.
2. Обчислення значень арксинусів чисел a .
3. Розв’язування рівнянь виду $\sin x = a$ із застосуванням загальної формули коренів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв’язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому при розв'язуванні тригонометричних рівнянь потрібно враховувати періодичність функцій?

2) У яких реальних задачах фізики, інженерії, географії виникає потреба розв'язувати рівняння $\sin x = a$?

3) У яких задачах геометрії та оптики може знадобитися рівняння $\sin x = a$?

4) Чи пов'язане рівняння $\sin x = a$ з рухом по колу чи коливанням маятника?

5) Чи можна за значенням синуса кута трикутника однозначно встановити міру цього кута?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Обчисліть: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$.

Відповідь. 0.

3. При яких значеннях аргументу функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення?

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Знайдіть область визначення функції $y = \operatorname{Atg} x$.

Відповідь. $\{x \mid x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

5. Перетворіть вираз $\sin x + \cos x$ у добуток, за формулою суми синусів.

Відповідь. $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Популяція рідкісного виду метеликів у заповіднику змінюється циклічно протягом року внаслідок сезонних змін клімату та кормової бази. Чисельність популяції $N(t)$ (у тисячах особин) моделюється функцією: $N(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10$, де t — час у місяцях ($t = 0$ відповідає початку січня).

Визначте:

- 1) чисельність популяції метеликів у січні;
- 2) найбільшу та найменшу можливу чисельність популяції;
- 3) в які місяці чисельність популяції метеликів сягне значення 12,5 тисяч особин.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2} \sin\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\pi x \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1}\right) = \sqrt{8}.$$

III. Розв'язування рівняння $\sin x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

Нагадаємо декілька фактів про функцію $y = \sin x$.

- 1) Функція $y = \sin x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1 у точках виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = 1$.
- 2) Функція $y = \sin x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 у точках виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = -1$.
- 3) Нулями функції $y = \sin x$ є числа виду πn , $n \in \mathbb{Z}$. Тому $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ є коренями рівняння $\sin x = 0$.

Узагальнимо дані у вигляді таблиці.

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Примітка. Рівняння виду $\sin x = 0$, $\sin x = 1$ та $\sin x = -1$ зустрічаються дуже часто, тому хоча їх і можна розв'язати за допомогою універсальної формули $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а потім розв'язок спростити, однак для швидшого і раціональнішого розв'язання краще вивчити ці особливі випадки напам'ять.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 4x = 1$.

Розв'язання.
$$\begin{cases} \sin 4x = 1, & 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \sin 4x = -1; & 4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Об'єднаємо сукупність множин розв'язків в одну множину:

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

7. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = 0$.

Розв'язання. Скористаємось непарністю функції $y = \sin x$ і перепишемо дане рівняння:

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0, \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

8. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$.

Розв'язання. Скористаємось непарністю функції $y = \sin x$ перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, 3x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Примітка. Якщо у рівнянні $\sin(kx + b) = a$, коефіцієнт k — від'ємний, то варто перетворити його на додатний, використовуючи непарність функції $y = \sin x$, тобто перейти до рівняння $\sin(-kx - b) = -a$.

9. Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1$.

Розв'язання. $\sin \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1, \frac{\pi x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z}.$

Оскільки $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1$, то рівність можлива лише при $n = 0$.

Тоді $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}, x^2 = 1, x = \pm 1.$

Відповідь. $\pm 1.$

IV. Обчислення значень арксинусів чисел a

Означення. Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) називають кут α $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, синус якого дорівнює a , тобто $\sin \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса

1. Для $|a| \leq 1$ існує єдине значення арксинуса.
2. Для $|a| > 1$ значень арксинуса не існує, тобто вирази $\arcsin \sqrt{2}$, $\arcsin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\arcsin 1,2$, $\arcsin(-4)$ не мають змісту.
3. Якщо $|a| \leq 1$, то $\sin(\arcsin a) = a$.
4. $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
5. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Ілюстративні приклади

- 10.** Обчисліть: $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Розв'язання. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \cos\left(-\arcsin\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

Нехай $\arcsin\frac{1}{4} = \alpha$, причому $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Тобто $\cos \alpha \geq 0$ і $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

Тоді $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

- 11.** Обчисліть: $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо $\sin\frac{5\pi}{4}$:

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}$.

12. Обчисліть: $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{3}$.

Примітка. Корисна тотожність: $\arcsin(\sin x) = x$, якщо $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то можна скористатися періодичністю функції $y = \sin x$ і привести аргумент функції $y = \arcsin(\sin x)$ у межі $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

13*. Обчисліть $\arcsin(\sin 2)$.

Розв'язання. Оскільки $2 > \frac{\pi}{2}$, то не можна відразу застосовувати формулу $\arcsin(\sin x) = x$. Спочатку потрібно замінити $\sin 2$ на синус числа, що належить відріzkу $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Зауважимо, що $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{2}$, звідки $-\frac{3\pi}{2} < -2 < -\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$.

Оскільки $\sin(\pi - 2) = \sin 2$, то за формулою $\arcsin(\sin x) = x$ маємо $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$.

Відповідь. $\pi - 2$.

V. Розв'язування рівнянь виду $\sin x = a$ із застосуванням загальної формули коренів

Запишемо загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ілюстративні приклади

14. Розв'яжіть рівняння $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $5x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$,

$$5x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

15. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Розв'язання. $2 \sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$4x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$4x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

16. Розв'яжіть рівняння $5 \sin \left(2 - \frac{7\pi x}{4} \right) = -1$.

Розв'язання. Скористаємось непарністю функції $y = \sin x$ і перепишемо дане рівняння:

$$5 \sin \left(\frac{7\pi x}{4} - 2 \right) = 1, \quad \sin \left(\frac{7\pi x}{4} - 2 \right) = \frac{1}{5},$$

$$\frac{7\pi x}{4} - 2 = (-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{7\pi x}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$7\pi x = (-1)^k \cdot 4 \arcsin \frac{1}{5} + 8 + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{(-1)^k \cdot 4 \arcsin \frac{1}{5} + 8}{7\pi} + \frac{4}{7}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{(-1)^k \cdot 4 \arcsin \frac{1}{5} + 8}{7\pi} + \frac{4}{7}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Задача 1. Популяція рідкісного виду метеликів у заповіднику змінюється циклічно протягом року внаслідок сезонних змін клімату та кормової бази. Чисельність популяції $N(t)$ (у тисячах особин) моделюється функцією: $N(t) = 5 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) + 10$, де

t — час у місяцях ($t = 0$ відповідає початку січня).

Визначте:

- 1) чисельність популяції метеликів у січні;
- 2) найбільшу та найменшу можливу чисельність популяції;
- 3) в які місяці чисельність популяції метеликів сягне значення 12,5 тисяч особин.

Розв'язання.

1) Якщо $t = 0$, то $N(0) = 5 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 \right) + 10 = 10$.

Отже, у січні популяція складає 10 тис. особин.

$$2) -1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 1, \quad -5 \leq 5\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 5, \quad 5 \leq 5\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10 \leq 15,$$

Таким чином найменша можлива чисельність популяції складає 5 тис. особин, а найбільша — 15 тис. особин.

$$3) 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10 = 12,5, \quad 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 2,5, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{6}t = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$t = (-1)^k + 6k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Отже, при $k = 0, t = 1$; при $k = 1, t = 5$; при $k > 2, t > 12$, а при $k < 0, t < 0$.

Таким чином, популяція у 12,5 тис. особин буде у лютому ($t = 1$) та у червні ($t = 5$).

Відповідь. 1) 10 000; 2) 15 000 і 5 000; 3) у лютому та у червні.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2} \sin\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\pi x \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1}\right) = \sqrt{8}.$$

Розв'язання. З умови випливає, що $x > 0$, тоді дане рівняння рівносильне такому:

$$\sqrt{2} \sin\left(\pi\sqrt{5 + 6x - x^2}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\pi\sqrt{5 + 6x - x^2}\right) = \sqrt{8}$$

$$\text{Нехай } t = \pi\sqrt{5 + 6x - x^2} = \pi\sqrt{14 - (x - 3)^2}, \text{ звідси } t \in [0; \pi\sqrt{14}].$$

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{8}$:

$$\frac{1}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t = 1, \quad \sin t \cos \frac{\pi}{3} + \cos t \sin \frac{\pi}{3} = 1, \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Обмеження на змінну t задаються системою нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \pi\sqrt{14}, \\ 0 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \sqrt{14}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{що виконується тільки тоді, коли } k = 0, k = 1.$$

$$\text{Якщо } k = 0, \text{ то маємо: } \sqrt{5 + 6x - x^2} = \frac{1}{6}, \quad x^2 - 6x - 5 + \frac{1}{36} = 0, \quad x = 3 \pm \frac{\sqrt{503}}{6}.$$

$$\text{Оскільки } x > 0, \text{ то } x = 3 + \frac{1}{6}\sqrt{503}.$$

$$\text{Якщо } k = 1, \text{ то маємо: } \sqrt{5 + 6x - x^2} = \frac{13}{6}, \quad x^2 - 6x - 5 + \frac{169}{36} = 0, \quad x = 3 \pm \frac{\sqrt{335}}{6}.$$

$$\text{Оскільки } x > 0, \text{ то } x = 3 + \frac{1}{6}\sqrt{335}.$$

$$\text{Відповідь. } 3 + \frac{1}{6}\sqrt{503}, \quad 3 + \frac{1}{6}\sqrt{335}.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–12 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \arcsin 1 - \arcsin(-1); & 2) \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 3) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right); & 4) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right). \end{array}$$

2. Обчисліть:

$$1) \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 2) \cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad 3) \sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right); \quad 4) \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 2x = 0; \quad 2) \sin \frac{x}{3} = 1; \quad 3) \sin 4x = -1; \quad 4) \sin \frac{x}{6} = -1.$$

4. Розв'язати рівняння:

$$1) \sin 3x = -\frac{1}{2}; \quad 2) 2\sin 7x = -1; \quad 3) 2\sin \frac{x}{3} = \sqrt{3}; \quad 4) 2\sin \frac{x}{4} = \sqrt{2}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin 2x = \frac{1}{3}; \quad 2) \sin 3x = \frac{\pi}{2}; \quad 3) \sin 5x = \frac{\pi}{3}; \quad 4) \sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1; & 2) 2\sin\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}; \\ 3) 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{2} = 0; & 4) 2\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0. \end{array}$$

Рівень В

1. Обчисліть:

$$1) \sin(4 \arcsin 1); \quad 2) \cos(6 \arcsin 1); \quad 3) \sin\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 4) \operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{2}\right).$$

2. Обчисліть:

$$1) \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right); \quad 3) \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right); \quad 4) \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right); & 2) \sin\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}\right); \\ 3) \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right); & 4) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \end{array}$$

4. Чи має зміст вираз:

$$1) \arcsin(\sqrt{5} - 2); \quad 2) \arcsin(2 - \sqrt{10}); \quad 3) \arcsin(\sqrt{5} - 3); \quad 4) \operatorname{tg}\left(6 \arcsin \frac{1}{2}\right)?$$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\sin\left(-\frac{x}{7} + \frac{2}{3}\right) = -1$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 0$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) = 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(-x) = \cos \frac{\pi}{3}$; 2) $\sin(-x) = \sin \frac{\pi}{2}$;
3) $2\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - 4\sin x \cos x = 0$; 2) $1 + 6\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0$;
3) $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0$; 4) $1 - 8\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = 0$.

8. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$; 2) $(4\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$.

10. Знайдіть нулі функції $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1,5$.

11. Знайдіть корені рівняння $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, що задовольняють умову $-\pi < x < 4\pi$.

12. Знайдіть корені рівняння, що задовольняють заданій умові:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, x > \pi$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x > 0$;
3) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$; 4) $\sin 3x = -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin \frac{1}{3}\right)$;
3) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}\right)$; 4) $\sin\left(\arccos \frac{4}{5} + \arccos \frac{3}{5}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\sin\left(2\arcsin \frac{1}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin \frac{1}{4}\right)$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a + 4)\sin^2 2x = a^2 - 16$?

6. Доведіть рівність:

1) $\arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos \left(-\frac{11}{\sqrt{130}} \right) = -\frac{3\pi}{4}$; 2) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{7} \right) = \arccos \left(-\frac{13}{24} \right)$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка графічно ілюструє обчислення арксинуса.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Розв'язки рівняння $\sin x = a$ на різних проміжках.
2. Геометрична інтерпретація розв'язків рівняння $\sin x = a$ на одиничному колі.
3. Використання комп'ютерних програм для розв'язування рівняння $\sin x = a$.
4. Використання рівняння $\sin x = a$ у моделюванні коливальних процесів.
5. Рівняння $\sin x = a$ у навігації та в астрономії.