

# Тема 3.

## Тригонометричні рівняння й нерівності

### Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати рівняння виду  $A \sin(kx + b) = a$ ;
- 2) виконувати вибірку коренів рівняння на заданому проміжку;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

#### II. Повторення

1. Розв’яжіть рівняння  $\sin 2x = 1$ .
2. Розв’яжіть рівняння  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ .
3. Розв’яжіть рівняння  $\sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
4. Розв’яжіть рівняння  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ .
5. Обчисліть  $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ .

#### III. Розв’язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$

Наведемо алгоритм розв’язування рівняння виду  $A \sin(kx + b) = a$ .

- 1) Якщо  $A = 0$  і  $a = 0$ , то будь-яке число є коренем даного рівняння.  
Якщо  $A = 0$  і  $a \neq 0$ , то рівняння коренів не має.

Якщо  $A \neq 0$ , то поділимо обидві частини даного рівняння на  $A$ , отримаємо рівняння  $\sin(kx + b) = \frac{a}{A}$ .

2) Якщо  $k < 0$ , то потрібно скористатися непарністю функції  $y = \sin x$  і змінити знаки біля  $k$  і  $b$  на протилежні, тобто перейти до рівняння  $\sin(-kx - b) = -\frac{a}{A}$ .

3) Якщо  $\left| \frac{a}{A} \right| > 1$ , то рівняння коренів не має.

4) Якщо  $\left| \frac{a}{A} \right| \leq 1$ , то знаходимо значення виразу  $kx + b$ :

- якщо  $\frac{a}{A}$  дорівнює 0, 1 чи  $-1$ , то застосовуємо формули для особливих випадків;
- в інших випадках використовуємо загальну формулу, тобто

$$kx + b = (-1)^k \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5) Розв'язуємо останнє рівняння як лінійне відносно  $x$ , попередньо обчисливши арксинус, якщо він табличний.

**Приклад 1.** Розв'яжіть рівняння  $2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + 1 = \cos\frac{\pi}{2}$ .

*Розв'язання.*  $2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + 1 = 0, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$

Скористаємось тим, що функція  $y = \sin x$  є непарною і перепишемо рівняння:

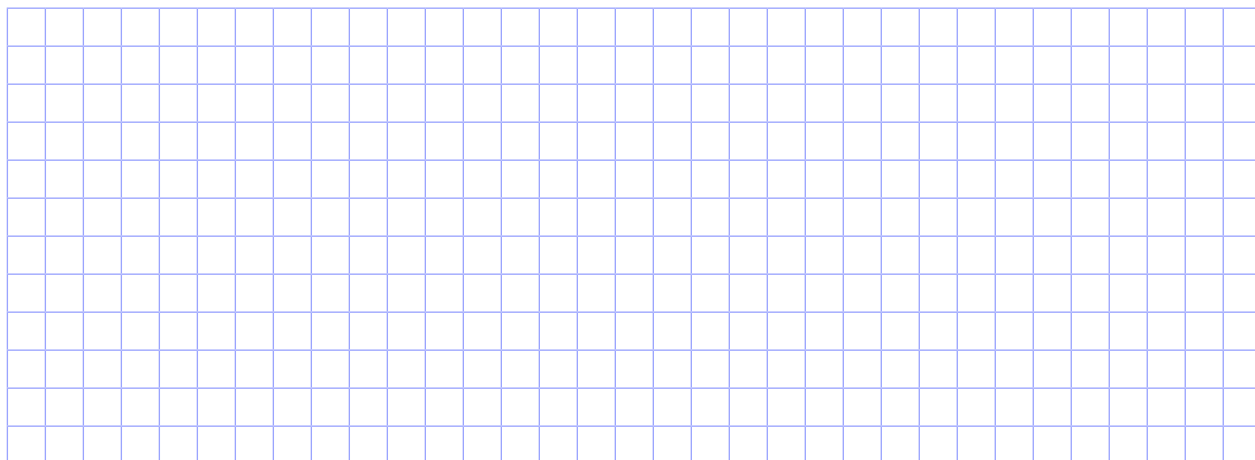
$$\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad 2x - \frac{5\pi}{6} = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2x - \frac{5\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

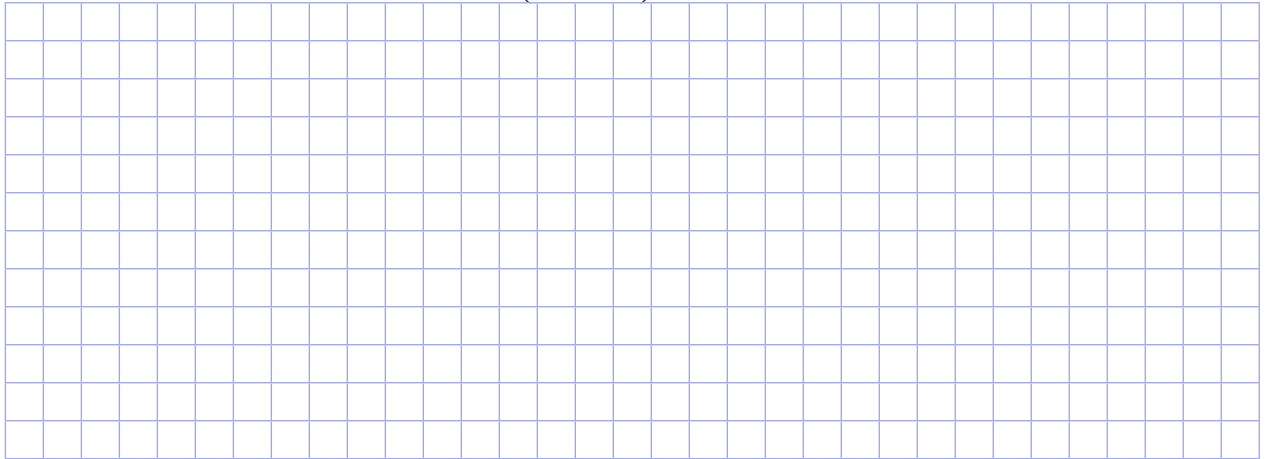
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Відповідь.*  $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 2.** Розв'яжіть рівняння  $2\left(\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}$ .



**Приклад 3.** Розв'яжіть рівняння  $3 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 6x\right) = 1$ .



#### IV. Вибірка коренів рівняння на заданому проміжку

При вибірці коренів тригонометричного рівняння, що належать певному проміжку існує три основні принципи розв'язання.

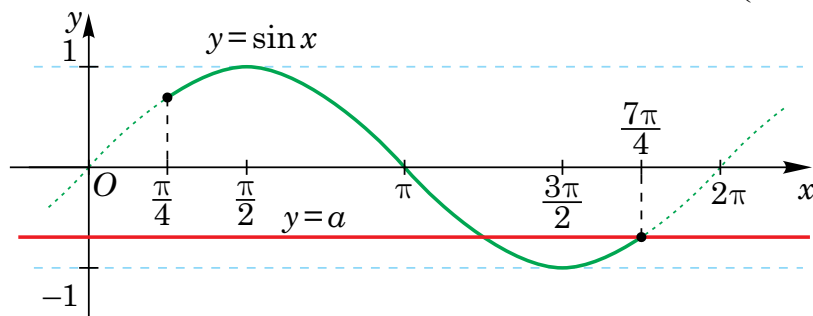
1) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на одиничному колі. Також позначити на одиничному колі заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

2) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на графіку. Також позначити на цьому графіку заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

3) Розв'язати рівняння і скласти систему нерівностей відносно цілого параметра так, щоб отримані корені належали заданому проміжку. Знайти усі значення цілого параметра, що задовольняють системі нерівностей. Підставити ці значення у загальну формулу коренів рівняння.

**Приклад 4.** Визначте кількість коренів рівняння  $\sin x = a$  на проміжку  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$  залежно від значень параметра  $a$ .

*Розв'язання.* Побудуємо графік функції  $y = \sin x$  на проміжку  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$  (див. рисунок).



Кількість коренів даного рівняння визначається кількістю точок перетину прямої  $y = a$  із графіком функції  $y = \sin x$  на проміжку  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ .

Звернемо увагу, що точка  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  не належить виділеній кривій, а точка

$\left(\frac{7\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  — належить.

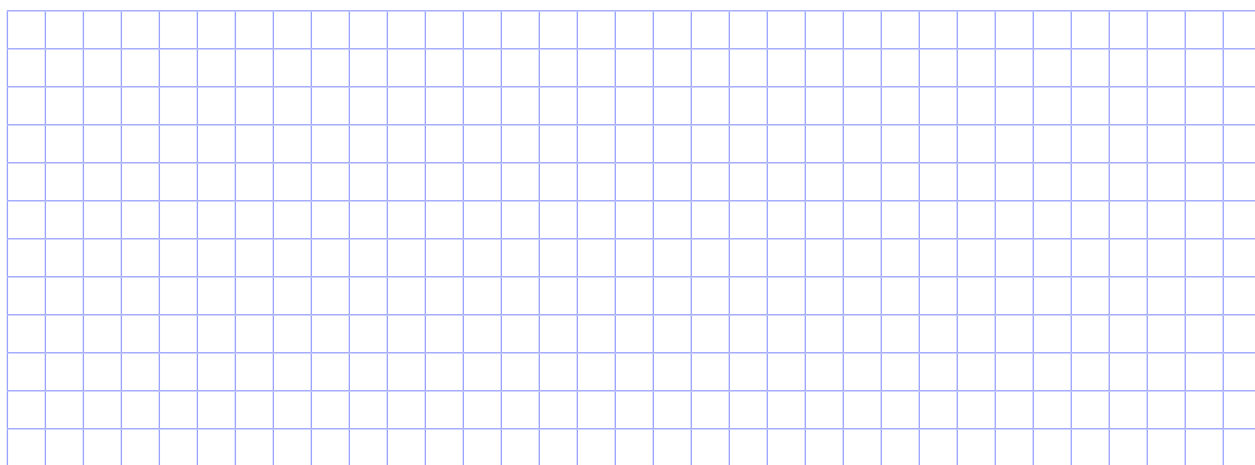
За допомогою рисунка можна зробити висновки:

- якщо  $a < -1$  або  $a > 1$ , то рівняння коренів не має;
- якщо  $a = -1$  або  $a = 1$  або  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то рівняння має 1 корінь;
- якщо  $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  або  $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ , то рівняння має 2 корені.

*Відповідь.* Якщо  $a < -1$  або  $a > 1$ , то рівняння коренів не має. Якщо  $a = -1$  або  $a = 1$  або  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то рівняння має 1 корінь. Якщо  $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  або  $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ , то рівняння має 2 корені.

**Приклад 5.** Знайдіть усі корені рівняння  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ , які задовольняють нерівність

$$-\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}.$$



## V. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача 1.** Температура повітря у теплиці впродовж доби змінюється за законом

$$T(t) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-3)\right) + 20, \text{ де температура } T \text{ вимірюється в градусах Цельсія, час}$$

$t$  вимірюється в годинах ( $0 \leq t \leq 24$ ). Знайдіть моменти часу, в межах доби, коли температура дорівнює  $25^\circ\text{C}$ .

**Задача 2. Олімпіадна задача.** Розв'яжіть рівняння  $x^2 + 6x \cdot \sin(xy) + 9 = 0$ .

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;    2)  $\sin\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;    3)  $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;    4)  $\sin\frac{x}{5} = 1$ .

2. Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:

1)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $0^\circ < x < 180^\circ$ ;    2)  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ .

3. Розв'яжіть рівняння:

1)  $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ;    2)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ;    3)  $3\sin(x + \pi) = -\frac{3}{2}$ ;    4)  $\frac{1}{2}\sin 4x = 0$ .

4. Розв'яжіть рівняння:

1)  $5\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$ ;    2)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ ;    3)  $4\sin(2x + \pi) = -2$ ;    4)  $2\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ .

5. Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sin(2x - 3) = \frac{1}{3}$ ;    2)  $\sin(1 - 3x) = \frac{\pi}{2}$ ;    3)  $\sin(5x + 1) = \frac{\pi}{3}$ ;    4)  $\sin(4x - 5) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$ .

6. Чи має зміст вираз:

1)  $\arcsin\sqrt{2}$ ;    2)  $\arcsin(-\pi)$ ;    3)  $\arcsin\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)$ ?

### Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$  і вкажіть:

- 1) найменший додатний корінь;
- 2) корені, які належать проміжку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;
- 3) найбільший від'ємний корінь;
- 4) корені, які належать проміжку  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ .

2. Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = \frac{1}{\sin 5x}$ ;    2)  $y = \frac{3}{\sin x - 1}$ ;    3)  $y = \frac{2,7}{\sin x - 3}$ ;    4)  $y = \frac{7x}{\sin x - 0,7}$ .

3. Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:

1)  $\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) = 1$ ,  $0 < x < 9$ ;    2)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) = 1$ ,  $3 < x < 9$ .

4. Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:

1)  $\sqrt{3} + 2\sin\frac{\pi x}{9} = 0$ ,  $8 < x < 20$ ;    2)  $1 + 2\sin\frac{\pi x}{3} = 0$ ,  $2 < x < 4$ ;  
3)  $1 + 2\sin\frac{\pi x}{15} = 0$ ,  $5 < x < 20$ ;    4)  $1 + \sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{8} = 0$ ,  $3 < x < 10$ .

- 5.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = a^2 + 1$  має розв'язки?
- 6.** Знайдіть усі корені рівняння  $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , які належать проміжку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
- 7.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $6\sin\left(\frac{9}{4}x - \frac{5\pi}{12}\right) = 3$ ;                      2)  $7\sin\left(-\frac{5}{6}x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{7}{2}$ ;
- 3)  $3\sin\left(\frac{11}{3}x - \frac{2\pi}{5}\right) = 1$ ;                      4)  $2\sin\left(-\frac{4}{3}x + \frac{3\pi}{10}\right) = -1$ .
- 8.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $\sin(\cos x) = \frac{1}{2}$ ;                      2)  $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- 9.** При яких значеннях параметра  $a$  має корені рівняння  $(a^2 - 9)\sin x = a - 3$ ?
- 10.** Розв'яжіть рівняння  $\sin x^2 = \frac{1}{2}$ .
- 11.** Розв'яжіть рівняння  $2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ .
- 12.** Знайдіть найменший додатний корінь рівняння  $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Рівень С

- 1.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $\sin x^2 = \frac{\pi}{2}$ ;                      2)  $\sin \frac{3\pi}{x^2} = -\frac{1}{2}$ .
- 2.** Розв'яжіть рівняння  $\sin \frac{2\pi x}{1+x^2} = 0$ .
- 3.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $\sin \pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      2)  $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- 4.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $\sin(2\pi \cos x) = 1$ ;                      2)  $\cos(2\pi \sin x) = 1$ .
- 5.** Розв'яжіть рівняння  $\left|\sin\left(\left|x\right| + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$ .
- 6.** Визначте кількість коренів рівняння  $\sin x = a$  на проміжку  $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$  залежно від значень параметра  $a$ .
- 7.** *Творче завдання.* Запрограмуйте алгоритм розв'язування рівняння виду  $A \sin(kx + b) = a$ .

## Рефлексія

- |    |                                                                                             |                        |    |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----|
| 1. | Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$ .                                    |                        |    |
|    | Так                                                                                         | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як виконувати вибірку коренів рівняння на заданому проміжку.                        |                        |    |
|    | Так                                                                                         | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.      |                        |    |
|    | Так                                                                                         | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я можу пояснити розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$ однокласнику/одно-класниці. |                        |    |
|    | Так                                                                                         | Ще треба потренуватися | Ні |

### Можливі теми проєктів

1. Застосування рівняння  $A \sin(kx + b) = a$  при моделюванні коливальних процесів.
2. Графічна інтерпретація розв'язання рівняння  $A \sin(kx + b) = a$  за допомогою Geogebra та Desmos.
3. Дослідження залежності коренів рівняння  $A \sin(kx + b) = a$  на заданому проміжку від коефіцієнтів  $A$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $b$ .
4. Тригонометричні рівняння в комп'ютерній анімації.
5. Вивчення коливання маятника за допомогою рівняння  $A \sin(kx + b) = a$ .







