

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розв’язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$.
2. Вибірка коренів рівняння на заданому проміжку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи завжди рівняння $A \sin(kx + b) = a$ має розв'язки?

2) Чи відрізняється алгоритм розв'язування рівняння $A \sin(kx + b) = a$ від алгоритму розв'язання рівняння $A \cos(kx + b) = a$?

3) Чому важливо враховувати періодичність при розв'язуванні тригонометричних рівнянь?

4) Чи допомагає вміння розв'язувати рівняння $A \sin(kx + b) = a$ при знаходженні положення маятника або положення точки на колі при обертанні?

5) Чи впливає зміна коефіцієнта k у рівнянні $A \sin(kx + b) = a$ на кількість коренів на заданому проміжку?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = 1$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{5} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

5. Обчисліть $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{5}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Температура повітря у теплиці впродовж доби змінюється за законом

$$T(t) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-3)\right) + 20, \text{ де температура } T \text{ вимірюється в градусах Цельсія, час}$$

t вимірюється в годинах ($0 \leq t \leq 24$). Знайдіть моменти часу, в межах доби, коли температура дорівнює 25°C .

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 6x \cdot \sin(xy) + 9 = 0$.

III. Розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$

Наведемо алгоритм розв'язування рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$.

1) Якщо $A = 0$ і $a = 0$, то будь-яке число є коренем даного рівняння.

Якщо $A = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння коренів не має.

Якщо $A \neq 0$, то поділимо обидві частини даного рівняння на A , отримаємо рівняння

$$\sin(kx + b) = \frac{a}{A}.$$

2) Якщо $k < 0$, то потрібно скористатися непарністю функції $y = \sin x$ і змінити знаки біля k і b на протилежні, тобто перейти до рівняння $\sin(-kx - b) = -\frac{a}{A}$.

3) Якщо $\left|\frac{a}{A}\right| > 1$, то рівняння коренів не має.

4) Якщо $\left|\frac{a}{A}\right| \leq 1$, то знаходимо значення виразу $kx + b$:

- якщо $\frac{a}{A}$ дорівнює 0, 1 чи -1 , то застосовуємо формули для особливих випадків;

- в інших випадках використовуємо загальну формулу, тобто

$$kx + b = (-1)^k \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

5) Розв'язуємо останнє рівняння як лінійне відносно x , попередньо обчисливши арксинус, якщо він табличний.

Ілюстративні приклади

- 6.** Розв'яжіть рівняння $2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)+1=\cos\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)+1=0, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=-\frac{1}{2}$

Скористаємось тим, що функція $y = \sin x$ є непарною і перепишемо рівняння:

$$\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, \quad 2x-\frac{5\pi}{6}=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2x-\frac{5\pi}{6}=(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2x=(-1)^k \frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x=(-1)^k \frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

- 7.** Розв'яжіть рівняння $2\left(\sin x \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{2}$.

Розв'язання. $\sin x \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\sin\left(x+x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2x+\frac{\pi}{3}=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2x+\frac{\pi}{3}=(-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2x=(-1)^k \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x=(-1)^k \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

- 8.** Розв'яжіть рівняння $3\sin\left(\frac{2\pi}{3}-6x\right)=1$.

Розв'язання. $3\sin\left(\frac{2\pi}{3}-6x\right)=1. \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}-6x\right)=\frac{1}{3},$

Скористаємось тим, що функція $y = \sin x$ є непарною і перепишемо рівняння:

$$\sin\left(6x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}, \quad 6x-\frac{2\pi}{3}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$6x-\frac{2\pi}{3}=(-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 6x=(-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3}+\frac{2\pi}{3}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x=(-1)^{k+1} \frac{1}{6} \arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^{k+1} \frac{1}{6} \arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

9. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. $\frac{5}{3}\pi \cos \pi x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $\cos \pi x = (-1)^k \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки рівняння $\cos \pi x = a$ має розв'язки при $|a| \leq 1$, то $k \in \{0; 1; -1\}$.

При інших цілих значеннях k вираз $k \left| (-1)^k \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k \right| > 1$.

Отримуємо сукупність
$$\begin{cases} \cos \pi x = \frac{1}{10}, & x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{10} + 2l, l \in \mathbb{Z}, \\ \cos \pi x = \frac{1}{2}, & x = \pm \frac{1}{3} + 2m, m \in \mathbb{Z}, \\ \cos \pi x = -\frac{7}{10}. & x = \pm \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{7}{10}\right) + 2n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $\pm \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{10} + 2l$, $\pm \frac{1}{3} + 2m$, $\pm \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{7}{10}\right) + 2n$, $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

10. Розв'яжіть рівняння $\sin \pi \sqrt{x} = -1$.

Розв'язання. $\pi \sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Останнє рівняння рівносильне системі:
$$\begin{cases} x = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)^2, \\ -\frac{1}{2} + 2k \geq 0, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)^2, \\ k \geq \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким чином $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Відповідь. $\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

IV. Вибірка коренів рівняння на заданому проміжку

При вибірці коренів тригонометричного рівняння, що належать певному проміжку існує три основні принципи розв'язання.

1) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на одиничному колі. Також позначити на одиничному колі заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

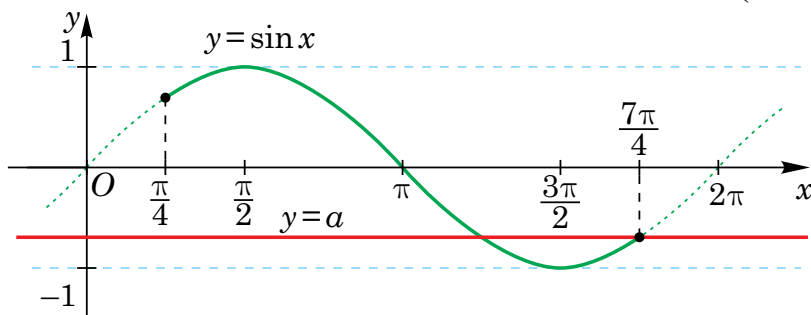
2) Розв'язати рівняння і позначити його розв'язки на графіку. Також позначити на цьому графіку заданий проміжок. Виписати корені рівняння, що задовольняють цьому проміжку.

3) Розв'язати рівняння і скласти систему нерівностей відносно цілого параметра так, щоб отримані корені належали заданому проміжку. Знайти усі значення цілого параметра, що задовольняють системі нерівностей. Підставити ці значення у загальну формулу коренів рівняння.

Ілюстративні приклади

- 11.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ (див. рисунок).



Кількість коренів даного рівняння визначається кількістю точок перетину прямої $y = a$ із графіком функції $y = \sin x$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Звернемо увагу, що точка $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не належить виділеній кривій, а точка

$\left(\frac{7\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — належить.

За допомогою рисунка можна зробити висновки:

- якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння коренів не має;
- якщо $a = -1$ або $a = 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то рівняння має 1 корінь;
- якщо $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то рівняння має 2 корені.

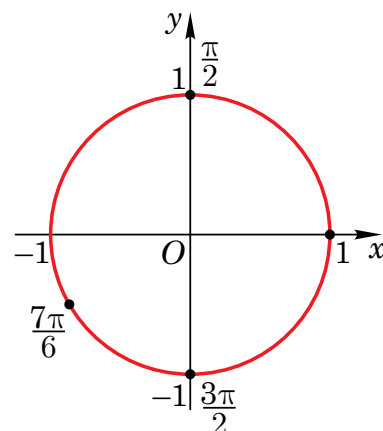
Відповідь. Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння коренів не має. Якщо $a = -1$ або $a = 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то рівняння має 1 корінь. Якщо $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то рівняння має 2 корені.

- 12.** Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$



$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Зобразимо відповідні точки на одиничному колі (див. рисунок).

Умову $-\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ задовольняють 3 корені: 1) $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$, 2) $\frac{\pi}{2}$, 3) $\frac{7\pi}{6}$.

Відповідь. $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$.

13. Розв'яжіть рівняння $1 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{4} = 0$ на проміжку $(-2; 10)$.

Розв'язання. $1 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{4} = 0, \sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\frac{\pi x}{4} = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z}, x = (-1)^{k+1} + 4k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 + 4 \cdot 2n, \\ x = 1 + 4 \cdot (2n + 1), n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = 8n - 1, \\ x = 8n + 5, n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$1) x = 8n - 1, -2 < 8n - 1 < 10, -1 < 8n < 11, -\frac{1}{8} < n < \frac{11}{8}.$$

Цю умову задовольняють значення $n = 0$ та $n = 1$, тобто коренями є $x = -1$ та $x = 7$.

$$2) x = 8n + 5, -2 < 8n + 5 < 10, -7 < 8n < 5, -\frac{7}{8} < n < \frac{5}{8}.$$

Цю умову задовольняє лише $n = 0$, тобто $x = 5$ є коренем рівняння.

Відповідь. $-1; 5; 7$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Температура повітря у теплиці впродовж доби змінюється за законом

$T(t) = 6 \sin \left(\frac{\pi}{12}(t - 3) \right) + 20$, де температура T вимірюється в градусах Цельсія, час

t вимірюється в годинах ($0 \leq t \leq 24$). Знайдіть моменти часу, в межах доби, коли температура дорівнює 25°C .

Розв'язання. $6 \sin \left(\frac{\pi}{12}(t - 3) \right) + 20 = 25, 6 \sin \left(\frac{\pi}{12}(t - 3) \right) = 5, \sin \left(\frac{\pi}{12}(t - 3) \right) = \frac{5}{6},$

$$\frac{\pi}{12}(t - 3) = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{5}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi t}{12} - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{5}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi t}{12} = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{5}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, t = (-1)^k \cdot \frac{12}{\pi} \arcsin \frac{5}{6} + 3 + 12k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arcsin \frac{5}{6} \approx 0,985, \pi \approx 3,14. t = (-1)^k \cdot 3,75 + 3 + 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $k < 0$, то $t < 0$.

Якщо $k = 0$, то $t = 6,75$ (0,75 год = 45 хв). Тобто потрібна температура буде о 6 год 45 хв.

Якщо $k = 1$, то $t = 11,25$ (0,25 год = 15 хв). Тобто потрібна температура буде о 11 год 15 хв.

Якщо $k > 2$, то $t > 24$.

Відповідь. О 6 год 45 хв, о 11 год 15 хв.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 6x \cdot \sin(xy) + 9 = 0$.

Розв'язання. $(x + 3\sin(xy))^2 - 9\sin^2(xy) + 9 = 0$, $(x + 3\sin(xy))^2 + 9(1 - \sin^2(xy)) = 0$,
 $(x + 3\sin(xy))^2 + 9\cos^2(xy) = 0$.

Рівняння рівносильне системі:
$$\begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0, \\ \cos(xy) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0, \\ \sin(xy) = 1; \end{cases} & \begin{cases} x = -3, \\ \sin(-3y) = 1; \end{cases} & \begin{cases} x = -3, \\ 3y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \begin{cases} x = -3, \\ y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0, \\ \sin(xy) = -1; \end{cases} & \begin{cases} x = 3, \\ \sin 3y = -1; \end{cases} & \begin{cases} x = 3, \\ 3y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \begin{cases} x = 3, \\ y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $\left(-3; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right); \left(3; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right), n, k \in \mathbb{Z}$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \sin\left(-\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 4) \sin \frac{x}{5} = 1.$$

2. Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:

$$1) \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0^\circ < x < 180^\circ; \quad 2) \sin 5x = -\frac{1}{2}, \quad 90^\circ < x < 180^\circ.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad 2) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad 3) 3\sin(x + \pi) = -\frac{3}{2}; \quad 4) \frac{1}{2}\sin 4x = 0.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}; \quad 2) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad 3) 4\sin(2x + \pi) = -2; \quad 4) 2\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin(2x - 3) = \frac{1}{3}; \quad 2) \sin(1 - 3x) = \frac{\pi}{2}; \quad 3) \sin(5x + 1) = \frac{\pi}{3}; \quad 4) \sin(4x - 5) = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

6. Чи має зміст вираз:

$$1) \arcsin \sqrt{2}; \quad 2) \arcsin(-\pi); \quad 3) \arcsin\left(\frac{a^2 + 1}{a^2}\right)?$$

Рівень В

- 1.** Розв'яжіть рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ і вкажіть:
- 1) найменший додатний корінь;
 - 2) корені, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
 - 3) найбільший від'ємний корінь;
 - 4) корені, які належать проміжку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.
- 2.** Знайдіть область визначення функції:
- 1) $y = \frac{1}{\sin 5x}$;
 - 2) $y = \frac{3}{\sin x - 1}$;
 - 3) $y = \frac{2,7}{\sin x - 3}$;
 - 4) $y = \frac{7x}{\sin x - 0,7}$.
- 3.** Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:
- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) = 1, 0 < x < 9$;
 - 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) = 1, 3 < x < 9$.
- 4.** Розв'яжіть рівняння на указаному проміжку:
- 1) $\sqrt{3} + 2\sin\frac{\pi x}{9} = 0, 8 < x < 20$;
 - 2) $1 + 2\sin\frac{\pi x}{3} = 0, 2 < x < 4$;
 - 3) $1 + 2\sin\frac{\pi x}{15} = 0, 5 < x < 20$;
 - 4) $1 + \sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{8} = 0, 3 < x < 10$.
- 5.** При яких значеннях параметра a рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = a^2 + 1$ має розв'язки?
- 6.** Знайдіть усі корені рівняння $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- 7.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $6\sin\left(\frac{9}{4}x - \frac{5\pi}{12}\right) = 3$;
 - 2) $7\sin\left(-\frac{5}{6}x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{7}{2}$;
 - 3) $3\sin\left(\frac{11}{3}x - \frac{2\pi}{5}\right) = 1$;
 - 4) $2\sin\left(-\frac{4}{3}x + \frac{3\pi}{10}\right) = -1$.
- 8.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\sin(\cos x) = \frac{1}{2}$;
 - 2) $\sin(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 9.** При яких значеннях параметра a має корені рівняння $(a^2 - 9)\sin x = a - 3$?
- 10.** Розв'яжіть рівняння $\sin x^2 = \frac{1}{2}$.
- 11.** Розв'яжіть рівняння $2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.
- 12.** Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x^2 = \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin \frac{3\pi}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{2\pi x}{1+x^2} = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(2\pi \cos x) = 1$;

2) $\cos(2\pi \sin x) = 1$.

5. Розв'яжіть рівняння $\left| \sin \left(\left| x \right| + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{2}$.

6. Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi \right]$ залежно від значень параметра a .

7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм розв'язування рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$.

VII. Рефлексія (1 хв)

1. Я вмію розв'язувати рівняння виду $A \sin(kx + b) = a$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, як виконувати вибірку коренів рівняння на заданому проміжку.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я можу пояснити розв'язування рівнянь виду $A \sin(kx + b) = a$ однокласнику/одно-класниці.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Застосування рівняння $A \sin(kx + b) = a$ при моделюванні коливальних процесів.

2. Графічна інтерпретація розв'язання рівняння $A \sin(kx + b) = a$ за допомогою Geogebra та Desmos.

3. Дослідження залежності коренів рівняння $A \sin(kx + b) = a$ на заданому проміжку від коефіцієнтів A , a , k , b .

4. Тригонометричні рівняння в комп'ютерній анімації.

5. Вивчення коливання маятника за допомогою рівняння $A \sin(kx + b) = a$.