

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду з параметрами

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розв’язувати рівняння виду $\cos x = A$, де A — вираз відносно параметра a ;
- 2) розв’язувати рівняння виду $\sin x = A$, де A — вираз відносно параметра a ;
- 3) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Скільки коренів рівняння $2\cos x = \sqrt{2}$ належать проміжку $[0; \pi]$?
2. Розв’яжіть рівняння $\cos(-2x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
3. Укажіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
4. Розв’яжіть рівняння $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.
5. Скільки коренів має рівняння $2\sin x = \sqrt{5}$ на проміжку $[0; 2\pi]$?

III. Розв’язування рівнянь $\cos x = A$, де A — вираз відносно параметра a

Нагадаємо загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $|a| \leq 1$:
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Особливі випадки

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має.

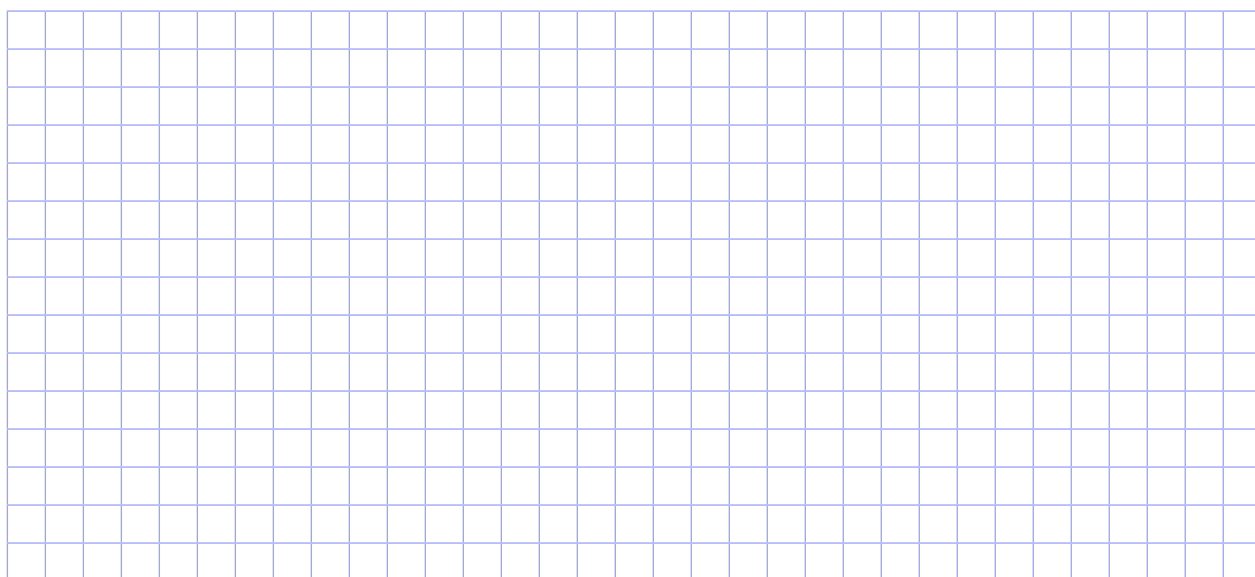
Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x = 1 + a^2$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Оскільки $\cos 2x \leq 1$, а $1 + a^2 \geq 1$, то рівняння рівносильне системі

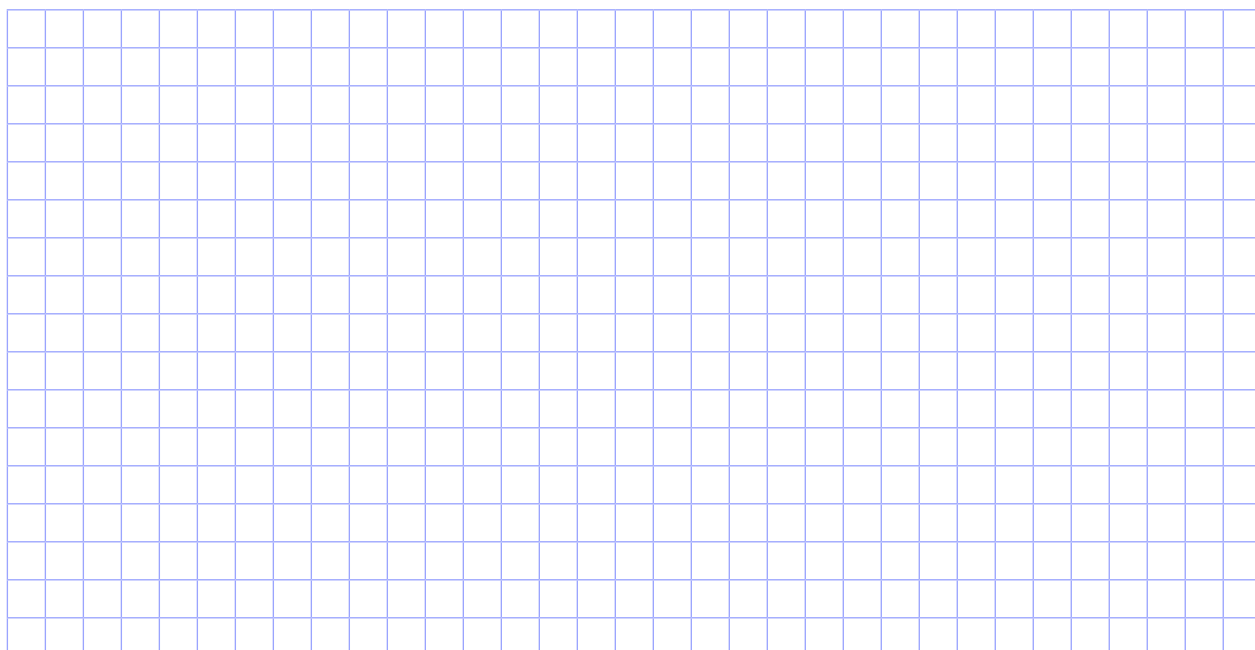
$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 1 + a^2 = 1, \end{cases} \text{ звідки слідує, що рівняння має корені } x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ лише при } a = 0.$$

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Якщо $a \neq 0$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\cos(a-1)x = a$ залежно від значень параметра a .



Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{3a+1}{a-2}$ залежно від значень параметра a .



IV. Розв'язування рівнянь $\sin x = A$, де A — вираз відносно параметра a

Нагадаємо загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Особливі випадки:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $a \sin x = 3$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. 1) Якщо $a = 0$, то $0 = 3$. Тобто дане рівняння коренів не має.

2) Якщо $a \neq 0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $\sin x = \frac{3}{a}$.

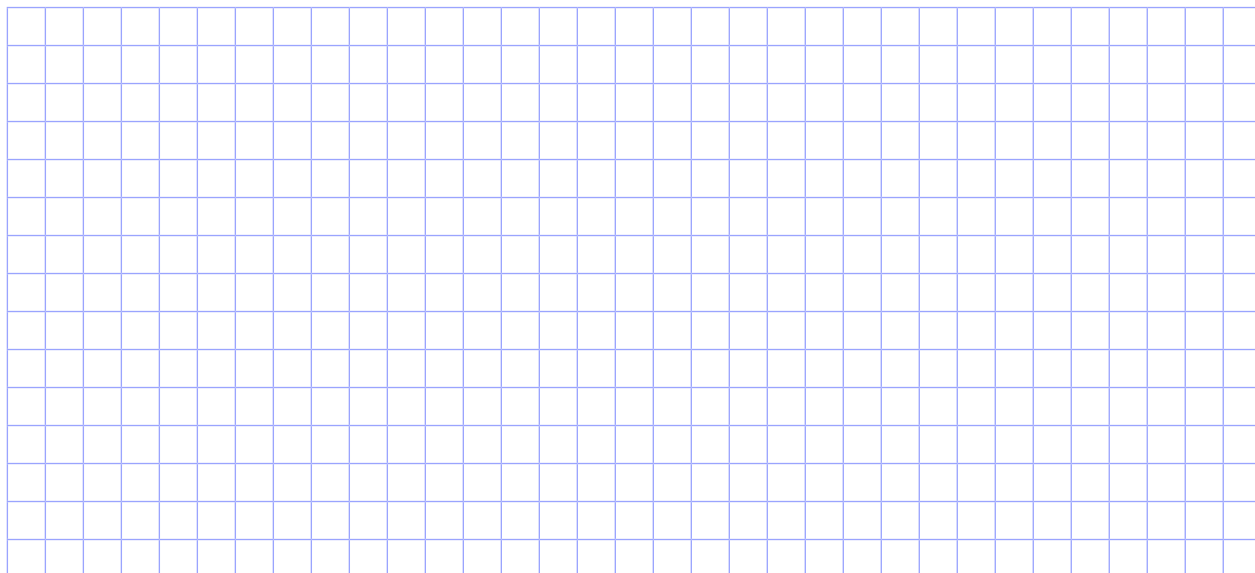
Якщо $\left| \frac{3}{a} \right| > 1$, тобто $a \in (-3; 0) \cup (0; 3)$, то дане рівняння коренів немає.

В інших випадках, тобто при $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, отримаємо множину коренів рівняння: $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. Якщо $a \in (-3; 3)$, то рівняння коренів не має. Якщо $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. Визначте найменше значення a , за якого має корені рівняння

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2a^2 + 5a - 6. \text{ (НМТ, 2023 р.)}$$



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Поршень у циліндрі двигуна рухається вгору-вниз за законом $h(t) = 6 + 4 \cos(100\pi t)$, де h — відстань від поршня до нижньої мертвої точки (у см), t — час (у секундах). Знайдіть момент часу, коли поршень знаходиться на відстані a см від нижньої «мертвої» точки.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть найменше додатне значення параметра a , при якому рівняння $\sin x = a - 1$ має корені.
2. Укажіть найбільше від'ємне значення параметра a , при якому рівняння $\cos x = a + 3$ має корені.
3. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a + 1$ має корені.
4. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos(2x - 1) = a + 2$ має корені.
5. Розв'яжіть рівняння $a \sin x = 1$ залежно від значень параметра a .
6. Розв'яжіть рівняння $a \cos x = a$ залежно від значень параметра a .

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = a - 1$ залежно від значень параметра a .
2. Розв'яжіть рівняння $\cos x = a + 3$ залежно від значень параметра a .
3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a + 1$ залежно від значень параметра a .
4. Розв'яжіть рівняння $\cos(2x - 1) = a + 2$ залежно від значень параметра a .
5. Розв'яжіть рівняння $\cos \sqrt{x} = a + 1$ залежно від значень параметра a .
6. Розв'яжіть рівняння $\sin x^2 = a + 3$ залежно від значень параметра a .
7. Розв'яжіть рівняння $\sin(-x^2 + 2x - 1) = a + 1$ залежно від значень параметра a .
8. Розв'яжіть рівняння $\cos(\pi x^2) = 5 - a$ залежно від значень параметра a .
9. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{2a}{a+1}$ залежно від значень параметра a .
10. Розв'яжіть рівняння $\cos x = a^2 - 1$ залежно від значень параметра a .
11. Розв'яжіть рівняння $(a^2 - 4) \cos x = a + 2$ залежно від значень параметра a .
12. Розв'яжіть рівняння $(a - 2) \sin x = a - 1$ залежно від значень параметра a .

Рівень С

1. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x - a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?
2. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}} = 0$ має розв'язки?
3. При яких значеннях a рівняння $\cos^2 2x + 3a^2 = 4a(\cos^4 x - \sin^4 x)$ має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.
4. При яких значеннях a рівняння $(a - 4)\cos^2 x + (2a + 3)\cos x + a + 1 = 0$ має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.
5. Розв'яжіть рівняння $4\sin x \cos^2 x = a + \sin x$ залежно від значень параметра a .
6. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi)$?
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм розв'язування будь-якого з рівнянь, які запропоновані в тренувальних вправах рівнів В або С.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Математичне моделювання припливів і відпливів за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 2.** Взаємозв'язок між областю значень тригонометричної функції та кількістю розв'язків рівнянь з параметром.
- 3.** Графічна інтерпретація розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 4.** Дослідження руху маятника годинника за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 5.** Вивчення руху поршня в циліндрі двигуна за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.







