

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування тригонометричних рівнянь найпростішого вигляду з параметрами

План уроку

1. Розв’язування рівнянь $\cos x = A$, де A — вираз відносно параметра a .
2. Розв’язування рівнянь $\sin x = A$, де A — вираз відносно параметра a .

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв’язання практичної задачі. Об’єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв’язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв’язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Для чого уміти розв'язувати рівняння з параметрами, зокрема тригонометричні?

2) Чи можна за допомогою параметра змінювати кількість або положення коренів рівняння?

3) У яких життєвих ситуаціях параметр у тригонометричному рівнянні має фізичний зміст?

4) Коли рівняння $\sin x = a$ та $\cos x = a$ не мають розв'язків?

5) У яких сферах науки або техніки тригонометричні рівняння з параметром допомагають аналізувати процеси, що періодично змінюються?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Скільки коренів рівняння $2 \cos x = \sqrt{2}$ належать проміжку $[0; \pi]$?

Відповідь. Один.

2. Розв'яжіть рівняння $\cos(-2x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. πn , $n \in \mathbb{Z}$.

3. Укажіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Скільки коренів має рівняння $2 \sin x = \sqrt{5}$ на проміжку $[0; 2\pi]$?

Відповідь. Жодного.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Поршень у циліндрі двигуна рухається вгору-вниз за законом $h(t) = 6 + 4 \cos(100\pi t)$, де h — відстань від поршня до нижньої мертвої точки (у см), t — час (у секундах). Знайдіть момент часу, коли поршень знаходиться на відстані a см від нижньої мертвої точки.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

III. Розв'язування рівнянь $\cos x = A$, де A — вираз відносно параметра a

Нагадаємо загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Особливі випадки

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x = 1 + a^2$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Оскільки $\cos 2x \leq 1$, а $1 + a^2 \geq 1$, то рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 1 + a^2 = 1, \end{cases} \text{ звідки слідує, що рівняння має корені } x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ лише при } a = 0.$$

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Якщо $a \neq 0$, то рівняння коренів не має.

7. Знайдіть кількість усіх цілих значень параметра a , за яких має корені рівняння

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{a^2 - 1}{3}.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівняння, за формулою:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Отримаємо рівняння: $\cos x = \frac{a^2 - 1}{3}.$

Дане рівняння має розв'язки, якщо $-1 \leq \frac{a^2 - 1}{3} \leq 1$,

$$\begin{cases} a^2 - 1 \leq 3, \\ a^2 - 1 \geq -3; \end{cases} \begin{cases} a^2 \leq 4, \\ a^2 \geq -2; \end{cases} -2 \leq a \leq 2.$$

Проміжку $[-2; 2]$ належить п'ять цілих значень параметра a : $-2, -1, 0, 1, 2$.

Відповідь. П'ять.

8. Розв'яжіть рівняння $\cos(a-1)x = a$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Якщо $a = 1$, то $\cos 0 = 1$, що є правильною рівністю. Тобто будь-яке дійсне число є коренем рівняння.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має.

Якщо $a \in [-1; 1)$, то $(a-1)x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, звідки

$$x = \pm \frac{\arccos a}{a-1} + \frac{2\pi n}{a-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має. Якщо $a = 1$, то будь-яке дійсне число є коренем рівняння. Якщо $a \in [-1; 1)$, то $x = \pm \frac{\arccos a}{a-1} + \frac{2\pi n}{a-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

9. Знайдіть найменше значення параметра a , за якого має корені рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$, $(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = a$.

За формулами пониження степеня $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ і $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, отримаємо:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = a, \quad \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = a,$$

$$\frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = a, \quad \frac{1 + \cos^2 2x}{2} = a,$$

$$1 + \cos^2 2x = 2a, \quad \cos^2 2x = 2a - 1.$$

Дане рівняння має розв'язки, якщо $0 \leq 2a - 1 \leq 1$, $1 \leq 2a \leq 2$, $0,5 \leq a \leq 1$.

Найменшим із чисел, які належать знайденому числовому проміжку, є число $a = 0,5$.

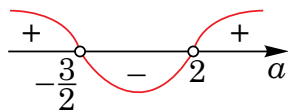
Відповідь. 0,5.

10. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{3a+1}{a-2}$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання.

1) Якщо $\frac{3a+1}{a-2} > 1$, тобто $\frac{2a+3}{a-2} > 0$, то рівняння коренів не має.

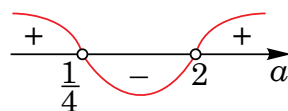
Застосуємо метод інтервалів (див. рисунок).



Якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$, то дане рівняння коренів не має.

2) Якщо $\frac{3a+1}{a-2} < -1$, тобто $\frac{4a-1}{a-2} < 0$, то рівняння також немає коренів.

Застосуємо метод інтервалів (див. рисунок).



Якщо $a \in \left(\frac{1}{4}; 2\right)$, то дане рівняння коренів не має.

Таким чином, при $a \in (-\infty; -1,5) \cup (0,25; 2) \cup (2; +\infty)$ дане рівняння коренів не має.

3) В усіх інших випадках, тобто при $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right]$, отримаємо множину коренів рівняння:

$$x = \pm \arccos \frac{3a+1}{a-2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -1,5) \cup (0,25; 2) \cup (2; +\infty)$, то рівняння коренів не має.

Якщо $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \pm \arccos \frac{3a+1}{a-2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

IV. Розв'язування рівнянь $\sin x = A$, де A — вираз відносно параметра a

Нагадаємо загальну формулу коренів рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Особливі випадки:

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння коренів не має.

Ілюстративні приклади

11. Розв'яжіть рівняння $a \sin x = 3$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. 1) Якщо $a = 0$, то $0 = 3$. Тобто дане рівняння коренів не має.

2) Якщо $a \neq 0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $\sin x = \frac{3}{a}$.

Якщо $\left|\frac{3}{a}\right| > 1$, тобто $a \in (-3; 0) \cup (0; 3)$, то дане рівняння коренів немає.

В інших випадках, тобто при $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, отримаємо множину коренів

$$\text{рівняння: } x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{a} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. Якщо $a \in (-3; 3)$, то рівняння коренів не має. Якщо $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$,

то $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{a} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

12. Визначте найменше значення a , за якого має корені рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2a^2 + 5a - 6. \quad (\text{НМТ, 2023 р.}).$$

Розв'язання. Дане рівняння має корені, якщо $|2a^2 + 5a - 6| \leq 1$, тобто

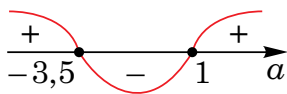
$$-1 \leq 2a^2 + 5a - 6 \leq 1.$$

Остання нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2a^2 + 5a - 6 \leq 1, \\ 2a^2 + 5a - 6 \geq -1; \end{cases} \begin{cases} 2a^2 + 5a - 7 \leq 0, \\ 2a^2 + 5a - 5 \geq 0. \end{cases}$$

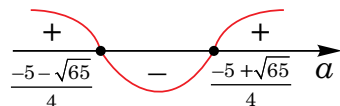
Розв'яжемо кожен з нерівностей окремо.

1) $2a^2 + 5a - 7 \leq 0$.



Отже, $a \in [-3,5; 1]$.

2) $2a^2 + 5a - 5 \geq 0$.



$$a \in \left(-\infty; \frac{-5-\sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{65}}{4}; +\infty\right).$$

Найменшим числом, що належить перетину множин $[-3,5; 1]$

і $\left(-\infty; \frac{-5-\sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{65}}{4}; +\infty\right)$ є 3,5.

Відповідь. 3,5.

- 13.** За якого найбільшого цілого значення параметра a рівняння $\sin x = 5 - 3a$ має корені?

Розв'язання. Оскільки $\sin x \in [-1; 1]$, то маємо нерівність:

$$-1 \leq 5 - 3a \leq 1, \quad -6 \leq -3a \leq -4, \quad \frac{4}{3} \leq a \leq 2, \quad 1\frac{1}{3} \leq a \leq 2.$$

Найбільшим цілим значенням a , яке задовольняє нерівність є 2.

Відповідь. 2.

- 14.** Визначте найбільше від'ємне значення a , за якого має корені рівняння

$$\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 8ax + 16a^2 + 1.$$

Розв'язання. $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 8ax + 16a^2 + 1$, $\sin \frac{\pi x}{2} = (x - 4a)^2 + 1$.

Оскільки $\sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$, а $(x - 4a)^2 + 1 \geq 0$, то дане рівняння матиме розв'язки лише

коли $\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, \\ (x - 4a)^2 + 1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, \\ x = 4a. \end{cases}$

Звідси, $\sin 2\pi a = 1$, $2\pi a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a = \frac{1}{4} + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

За умовою, $a < 0$, тобто $\frac{1}{4} + n < 0$, $n < -\frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Найбільше ціле значення n , що задовольняє нерівність дорівнює -1 , тобто

$$a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-0,75$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Поршень у циліндрі двигуна рухається вгору-вниз за законом $h(t) = 6 + 4 \cos(100\pi t)$, де h — відстань від поршня до нижньої мертвої точки (у см), t — час (у секундах). Знайдіть момент часу, коли поршень знаходиться на відстані a см від нижньої «мертвої» точки.

Розв'язання. $6 + 4 \cos(100\pi t) = a$, $\cos(100\pi t) = \frac{a-6}{4}$.

1) Якщо $\frac{a-6}{4} > 1$, тобто $a > 10$, то рівняння коренів не має.

2) Якщо $\frac{a-6}{4} < -1$, тобто $a < 2$, то рівняння коренів не має.

3) Якщо $a \in [2; 10]$, то $100\pi t = \pm \arccos \frac{a-6}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, звідки

$$t = \pm \frac{1}{100\pi} \arccos \frac{a-6}{4} + \frac{n}{50}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 2) \cup (10; +\infty)$, то такого положення поршня немає.

Якщо $a \in [2; 10]$, то $t = \pm \frac{1}{100\pi} \arccos \frac{a-6}{4} + \frac{n}{50}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$,

то $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \sin 2x + a = 0$, $\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0$.

Нехай $\sin 2x = t$, тоді $t^2 - 2t - 2(a+1) = 0$, $D = 4 + 8(a+1) = 12 + 8a$.

1) Якщо $12 + 8a < 0$, $a < -\frac{3}{2}$, то рівняння розв'язків немає.

2) Якщо $12 + 8a = 0$, $a = -\frac{3}{2}$, то $t = \frac{2}{2} = 1$.

Отже, $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Якщо $12 + 8a > 0$, $a > -\frac{3}{2}$, то маємо корені рівняння:

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{12 + 8a}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3 + 2a}}{2} = 1 + \sqrt{3 + 2a} > 1,$$

тому рівняння $\sin 2x = 1 + \sqrt{3 + 2a}$ розв'язків немає;

$$t_2 = \frac{2 - \sqrt{12 + 8a}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3 + 2a}}{2} = 1 - \sqrt{3 + 2a}.$$

Рівняння $\sin 2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$ матиме розв'язки, якщо $|1 - \sqrt{3 + 2a}| \leq 1$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} 1 - \sqrt{3+2a} \geq -1, \\ 1 - \sqrt{3+2a} \leq 1; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{3+2a} \leq 2, \\ \sqrt{3+2a} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 3+2a \leq 4, \\ a \geq -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Отже, $-\frac{3}{2} < a \leq \frac{1}{2}$. Якщо $a = \frac{1}{2}$, то $t_1 = -1$.

Розв'язками рівняння $\sin 2x = -1$ є $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

При $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$ маємо рівняння $\sin 2x = 1 - \sqrt{3+2a}$, звідки

$$2x = (-1)^k \cdot \arcsin(1 - \sqrt{3+2a}) + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin(1 - \sqrt{3+2a}) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. 1) Якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то рівняння розв'язків немає.

2) Якщо $a = -\frac{3}{2}$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 3) Якщо $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \arcsin(1 - \sqrt{3+2a}) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. 4) \text{ Якщо } a = \frac{1}{2}, \text{ то } x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть найменше додатне значення параметра a , при якому рівняння $\sin x = a - 1$ має корені.
2. Укажіть найбільше від'ємне значення параметра a , при якому рівняння $\cos x = a + 3$ має корені.
3. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a + 1$ має корені.
4. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos(2x - 1) = a + 2$ має корені.
5. Розв'яжіть рівняння $a \sin x = 1$ залежно від значень параметра a .
6. Розв'яжіть рівняння $a \cos x = a$ залежно від значень параметра a .

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = a - 1$ залежно від значень параметра a .
2. Розв'яжіть рівняння $\cos x = a + 3$ залежно від значень параметра a .
3. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a + 1$ залежно від значень параметра a .
4. Розв'яжіть рівняння $\cos(2x - 1) = a + 2$ залежно від значень параметра a .
5. Розв'яжіть рівняння $\cos \sqrt{x} = a + 1$ залежно від значень параметра a .
6. Розв'яжіть рівняння $\sin x^2 = a + 3$ залежно від значень параметра a .
7. Розв'яжіть рівняння $\sin(-x^2 + 2x - 1) = a + 1$ залежно від значень параметра a .

8. Розв'яжіть рівняння $\cos(\pi x^2) = 5 - a$ залежно від значень параметра a .
9. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{2a}{a+1}$ залежно від значень параметра a .
10. Розв'яжіть рівняння $\cos x = a^2 - 1$ залежно від значень параметра a .
11. Розв'яжіть рівняння $(a^2 - 4)\cos x = a + 2$ залежно від значень параметра a .
12. Розв'яжіть рівняння $(a - 2)\sin x = a - 1$ залежно від значень параметра a .

Рівень С

1. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x - a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?
2. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}} = 0$ має розв'язки?
3. При яких значеннях a рівняння $\cos^2 2x + 3a^2 = 4a(\cos^4 x - \sin^4 x)$ має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.
4. При яких значеннях a рівняння $(a - 4)\cos^2 x + (2a + 3)\cos x + a + 1 = 0$ має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.
5. Розв'яжіть рівняння $4\sin x \cos^2 x = a + \sin x$ залежно від значень параметра a .
6. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi)$?
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм розв'язування будь-якого з рівнянь, які запропоновані в тренувальних вправах рівнів В або С.

VII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було

- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Математичне моделювання припливів і відпливів за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 2.** Взаємозв'язок між областю значень тригонометричної функції та кількістю розв'язків рівнянь з параметром.
- 3.** Графічна інтерпретація розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 4.** Дослідження руху маятника годинника за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 5.** Вивчення руху поршня в циліндрі двигуна за допомогою найпростіших тригонометричних рівнянь з параметрами.