

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 8. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

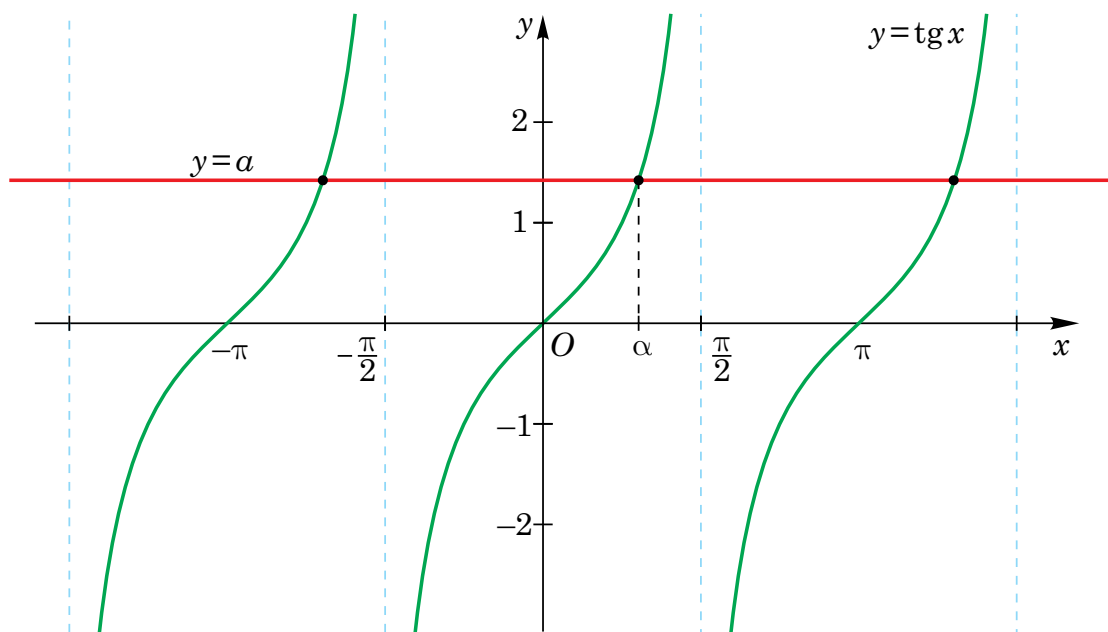
- 1) розглянете графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$;
- 2) вивчите означення та основні властивості арктангенса;
- 3) вивчите загальну формулу розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Усно. Повторення

1. Укажіть нулі функції $y = \operatorname{tg} x$.
2. У яких точках функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває значення $\sqrt{3}$?
3. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.
4. Обчисліть: $8 \sin^2 20^\circ + 8 \cos^2 70^\circ$.
5. Спростіть, за формулою зведення $\operatorname{Atg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

III. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).

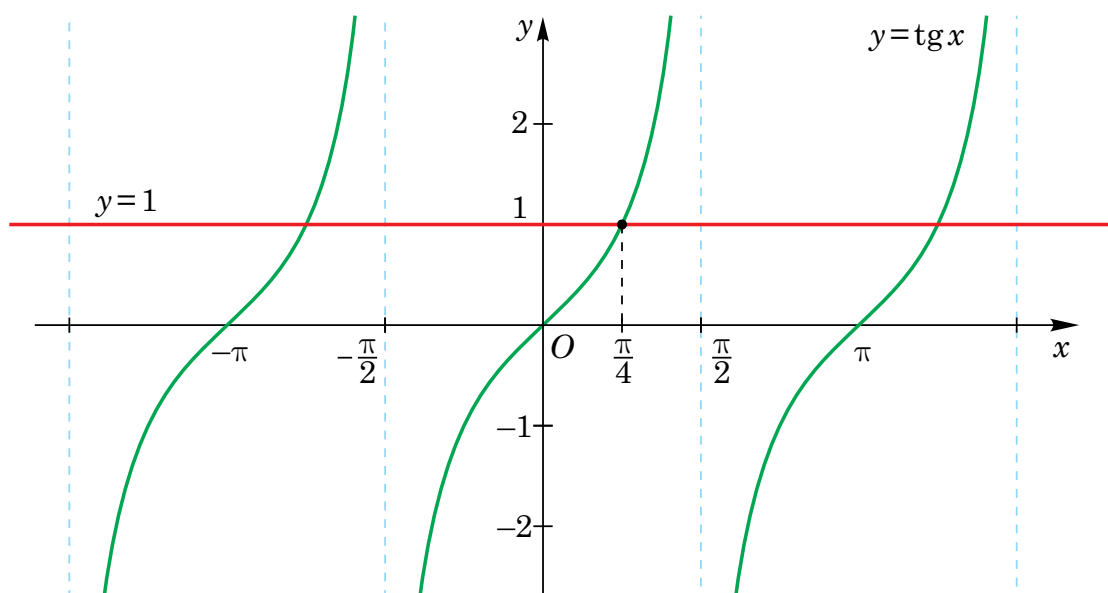


На проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графіки завжди мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період тангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = 1$ (див. рисунок).

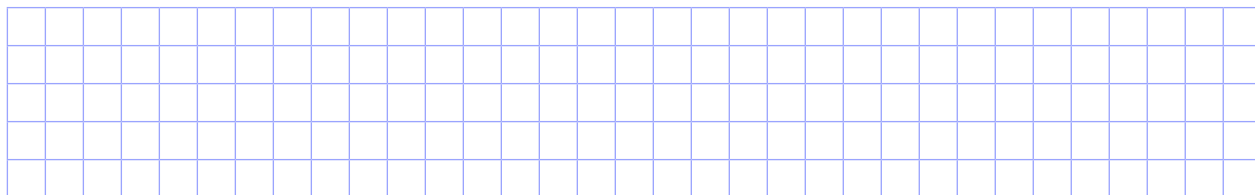
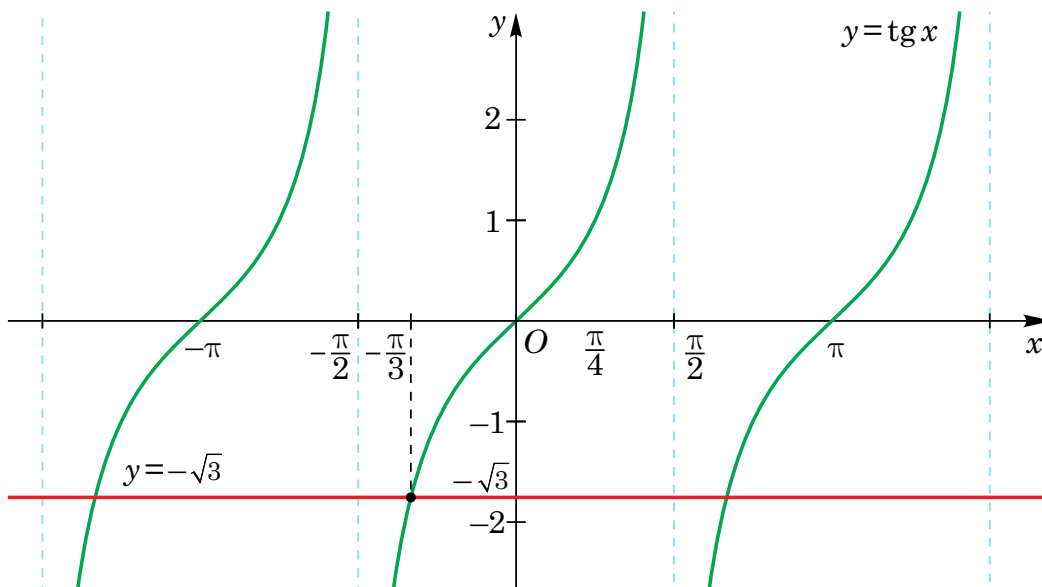


Одним із кутів, тангенс якого дорівнює 1, є кут $\frac{\pi}{4}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Використовуйте графік (див. рисунок).



IV. Означення арктангенса числа a

Кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Приклад 3. Обчисліть $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

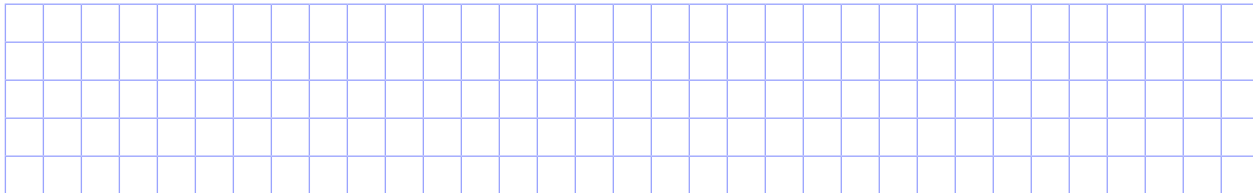
Розв'язання. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

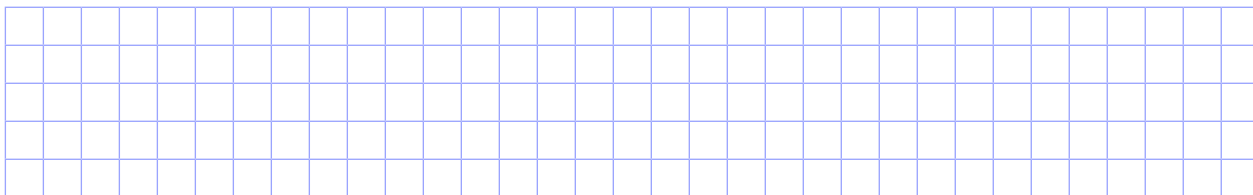
V. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна записати у вигляді: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 1$.



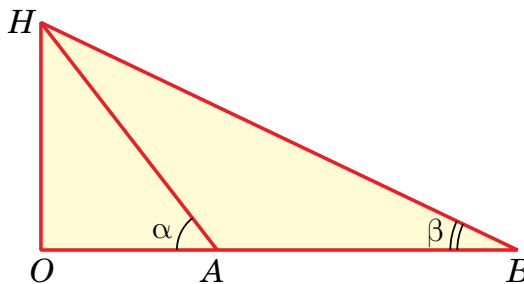
Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Спостерігач, який перебуває в точці A , бачить дерево, зображене відрізком OH , яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B , — під кутом β . Знайдіть, чому дорівнює кут β , якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{tg} x = -1$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 0$;

2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x = 0$;

4) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$;

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = 0,2$; 3) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{9}$; 4) $\operatorname{tg} x = 7$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(2x-1) = -\frac{1}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 0,5$; 3) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$; 4) $\operatorname{tg}\left(0,1x-\frac{\pi}{3}\right) = 7$.

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3\operatorname{arctg} \sqrt{3} - 4\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1$;
3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(-1)$; 4) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$;
3) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = 1$.

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать проміжку:

1) $\operatorname{tg} 3x = 3, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\operatorname{tg} 2x = -2, x \in [0; \pi]$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$; 2) $(\operatorname{tg} x - 4,5)(1 + 2\sin x) = 0$;
3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$; 4) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$; 2) $(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$;
3) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(2\operatorname{tg} \frac{x}{12} + 1\right) = 0$; 4) $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$; 2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x = 3$; 2) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$.

9. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; \pi]$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(0,5x) \cdot \sqrt{9-4x^2} = 0$; 2) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{1-|x|} = 0$.

- 12.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$.

Рівень С

- 4.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?
- 5.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\operatorname{tg}(3 \operatorname{tg} 2\pi x) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} \cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.
- 6.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше чотирьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?
- 7.** *Творче завдання.* Створіть за допомогою Geogebra або Desmos графічну ілюстрацію розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = a$.

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-

2)
.....
.....
?
.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Геометрична інтерпретація рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
2. Практичне застосування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у фізиці, в геометрії, у техніці.
3. Історичний огляд розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у класичній математиці та в астрономії.
4. Створення калькулятора для розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ будь-якою мовою програмування.
5. Розв'язування найпростіших рівнянь виду $\operatorname{arctg} x = a$.







