

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 8. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
2. Означення арктангенса числа a як кореня рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
3. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи існують такі значення a , для яких рівняння $\operatorname{tg} x = a$ не має розв'язків?

2) Чи будь-яке число належить ОДЗ рівняння $\operatorname{tg} x = a$?

3) Чи можна використати рівняння $\operatorname{tg} x = a$ для визначення кута підйому літака або кута спостереження об'єкта на відстані?

4) Чи допомагають графіки функцій при знаходженні кількості коренів рівняння?

5) Для рівнянь $\cos x = a$ та $\sin x = a$ ми вводили поняття арккосинуса та арксинуса. Чи існує подібне поняття для рівняння $\operatorname{tg} x = a$?

II. Усно. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть нулі функції $y = \operatorname{tg} x$.

Відповідь. πn , $n \in \mathbb{Z}$.

2. У яких точках функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває значення $\sqrt{3}$?

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

Відповідь. $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Обчисліть: $8 \sin^2 20^\circ + 8 \cos^2 70^\circ$.

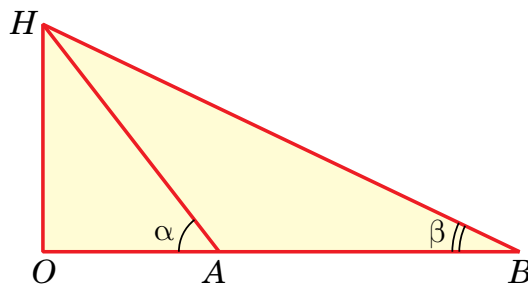
Відповідь. 8.

5. Спростіть, за формулою зведення $\operatorname{Atg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$.

Відповідь. $-\operatorname{tg} \alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

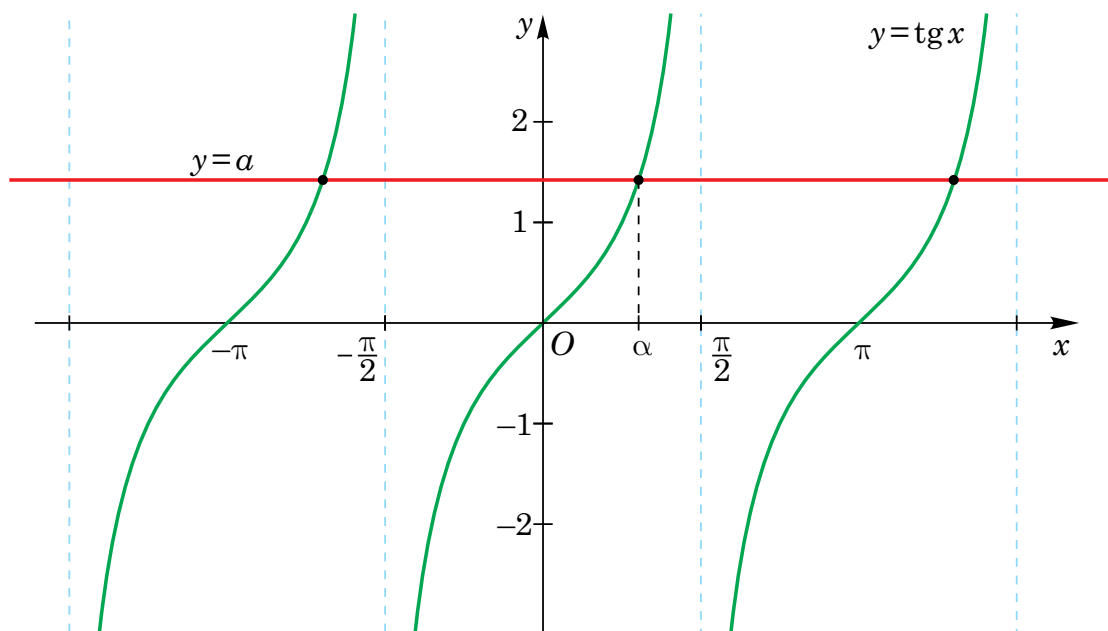
Задача 1. Спостерігач, який перебуває в точці A , бачить дерево, зображене відрізком OH , яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B , — під кутом β . Знайдіть, чому дорівнює кут β , якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

III. Графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).



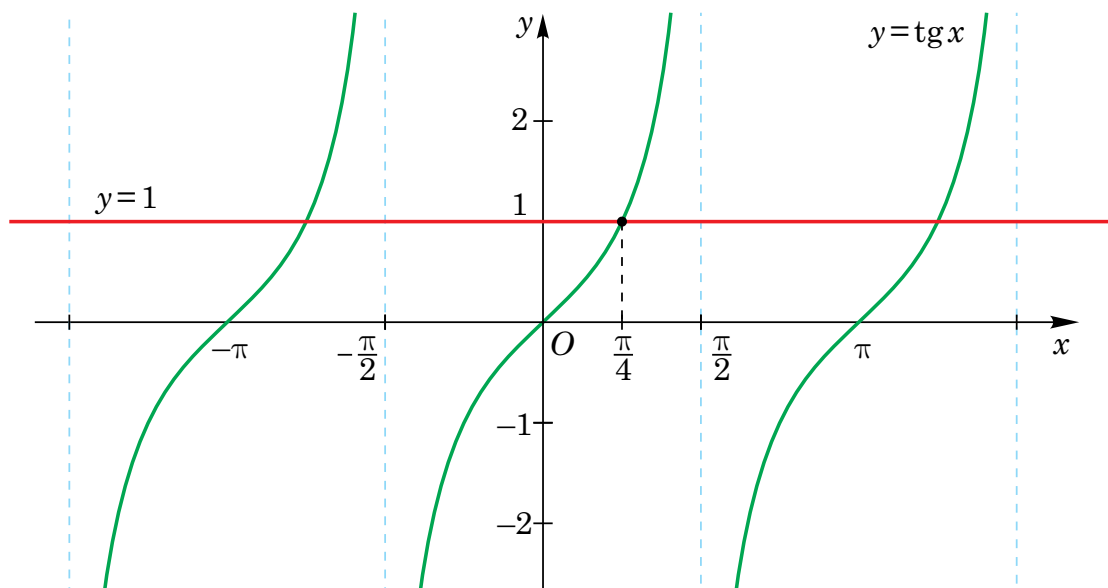
На проміжку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графіки завжди мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період тангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = 1$ (див. рисунок).

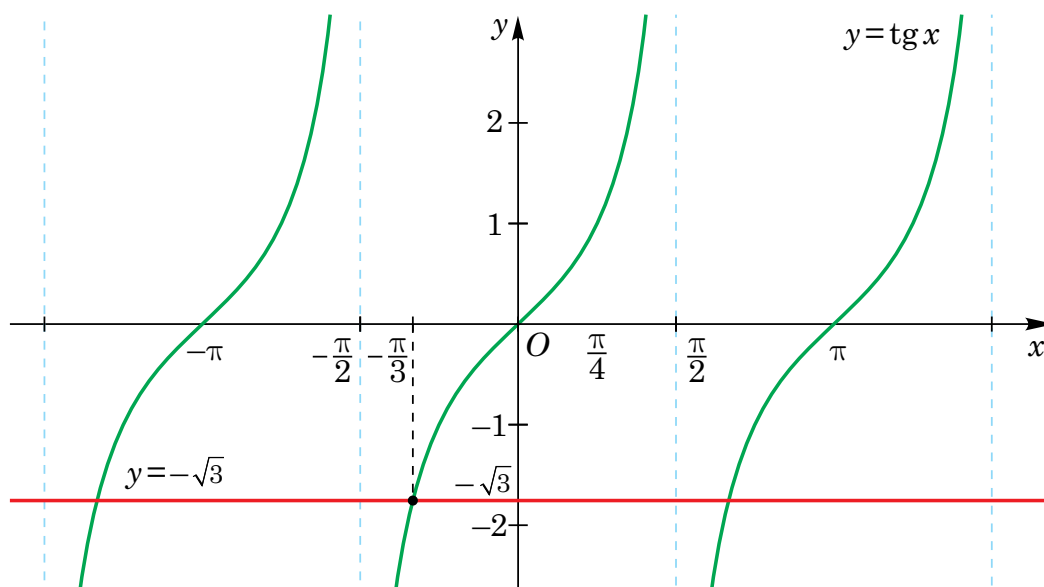


Одним із кутів, тангенс якого дорівнює 1, є кут $\frac{\pi}{4}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = -\sqrt{3}$ (див. рисунок).



Одним із кутів, тангенс якого дорівнює $-\sqrt{3}$, є кут $-\frac{\pi}{3}$. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

IV. Означення арктангенса числа a

Кут $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арктангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Ілюстративні приклади

8. Обчисліть $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

9. Обчисліть $\operatorname{arctg}(-1)$.

Розв'язання. $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}$.

10. Чи є правильною рівність $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Розв'язання. Хоча $\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, проте $\frac{4\pi}{3} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому рівність $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}$ —

неправильна.

Відповідь. Ні.

V. Формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна записати у вигляді: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

11. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

12. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ непарна, то:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{3} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

13. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 3\right) = 3.$

Розв'язання. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 3\right) = 3, \frac{x}{2} - 3 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} = 3 + \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z},$

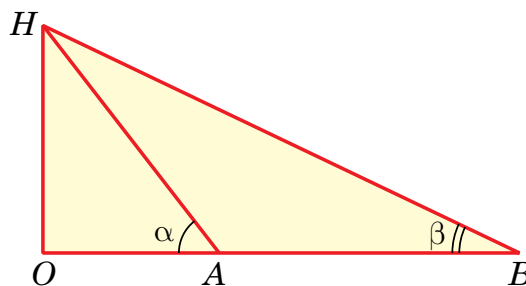
$$x = 6 + 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $6 + 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Спостерігач, який перебуває в точці A , бачить дерево, зображене відрізком OH , яке росте вертикально, під кутом α (див. рисунок). Спостерігач, що перебуває в точці B , — під кутом β . Знайдіть, чому дорівнює кут β , якщо відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $AB = 2OA$.



Розв'язання.

1) $\triangle AHO$: $\frac{OH}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$, звідки $OH = OA \operatorname{tg} \alpha$.

2) $\triangle BHO$: $\frac{OH}{OA + AB} = \operatorname{tg} \beta, \frac{OA \operatorname{tg} \alpha}{OA + AB} = \operatorname{tg} \beta,$

$$OA \operatorname{tg} \alpha = OA \operatorname{tg} \beta + AB \operatorname{tg} \beta, AB \operatorname{tg} \beta = OA(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \frac{AB}{OA} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}.$$

3) $2 = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}, 2\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta, 3\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \beta = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Оскільки $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{6}.$

Відповідь. $\frac{\pi}{6}.$

Задача 2. Олімпіадна задача. Розв'яжіть рівняння $\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$(3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 + 5(1 + \sin 3x) + (1 - \cos 12x) = 0$$

$$\text{або } (3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 + 5(1 + \sin 3x) + 2 \sin^2 6x = 0.$$

Оскільки $(3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 \geq 0$, $2 \sin^2 6x \geq 0$, то $0 \leq 5(1 + \sin 3x) \leq 1$.

Тому дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0, \\ 1 + \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = 0; \end{cases} \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0, \\ 1 + \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = 0; \end{cases} \begin{cases} |\operatorname{tg} x| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin 3x = -1, \\ \cos 3x = 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}; \\ \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Відповідь. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)**Рівень А****1.** Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 0$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{tg} x = -1$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 0$;

2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x = 0$;

4) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$;

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{tg} x = 0,2$;

3) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{9}$;

4) $\operatorname{tg} x = 7$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(2x - 1) = -\frac{1}{3}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0,5$;

3) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$;

4) $\operatorname{tg}\left(0,1x - \frac{\pi}{3}\right) = 7$.

6. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 4 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right);$

2) $2 \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} 1;$

3) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(-1);$

4) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}.$

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 - \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0;$

2) $1 - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{7} \right) = 0;$

3) $\operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3};$

4) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} = 0;$

2) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = 1;$

3) $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \sqrt{3};$ 4) $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = 1.$

4. Знайдіть усі корені рівняння, що належать проміжку:

1) $\operatorname{tg} 3x = 3, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$

2) $\operatorname{tg} 2x = -2, x \in [0; \pi].$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{tg} x - 4,5)(1 + 2 \sin x) = 0;$

3) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0;$

4) $(\operatorname{tg} x + 4) \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) = 0.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0;$

3) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{12} + 1 \right) = 0;$

4) $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{6} + 1 \right) (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x;$

2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x.$

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^2 x = 3;$

2) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}.$

9. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; \pi]$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(0,5x) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0;$

2) $\operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{1 - |x|} = 0.$

11. Знайдіть найбільший від'ємний та найменший додатний корінь рівняння $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$

12. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right).$

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 0$.
- 2.** При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{tg} x + 3} = 0$?
- 3.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?
- 4.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?
- 5.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\operatorname{tg}(3\operatorname{tg} 2\pi x) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} \cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.
- 6.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше чотирьох коренів рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?
- 7.** **Творче завдання.** Створіть за допомогою Geogebra або Desmos графічну ілюстрацію розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = a$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

[illegible]

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.

.

2)

.

.

.....

Можливі теми проєктів

1. Геометрична інтерпретація рівняння $\operatorname{tg} x = a$.
2. Практичне застосування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у фізиці, в геометрії, у техніці.
3. Історичний огляд розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ у класичній математиці та в астрономії.
4. Створення калькулятора для розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ будь-якою мовою програмування.
5. Розв'язування найпростіших рівнянь виду $\operatorname{arctg} x = a$.